

COMPENDIO

DEL

CALCOLO SUBLIME

DEL

CAVALIERE BRUNACCI,

MEMBRO DELL' ISTITUTO

E

PROFESSORE NELL' UNIVERSITA DI PAVIA.

AD USO

DELLE UNIVERSITA DEL REGNO.

VOLUME PRIMO.



MILANO,

DALLA STAMPERIA REALE,

1811.

VERTIMENTO DELL' AUTORE.

Questo Compendio contiene i più importanti rami del calcolo delle differenze finite, *del calcolo* differenziale *e dell'* integrale, *esposti con quella estensione che concede il tempo destinato nelle università per dettarli.*

Per questo coloro che amassero o maggiore estensione in siffatte dottrine, o vedere quelle delle quali non parla il Compendio, possono rivolgersi al mio Corso di Calcolo sublime *stampato nel* 1805, 6, 7 *e* 8 *a* Firenze; *e per le applicazioni del calcolo delle* differenze finite *alla Geometria, oltre quello che io ne do nel mentovato corso, possono leggere la* Poligonometria analitica *del professore* Magistrini.



COMPENDIO
DEL CALCOLO SUBLIME.

PARTE I.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.



CAPO PRIMO.

Differenze delle funzioni di una sola variabile.

§ 1. Rappresentando con y_x una qualunque funzione della variabile x, se questa variabile riceve un aumento qualunque ω, la funzione conterrà allora $x+\omega$, ove conteneva x. In questo secondo caso rappresentiamola con $y_{x+\omega}$. Se ora da questa $y_{x+\omega}$ sottrarremo la funzione primiera y_x, avremo una nuova funzione la quale sarà la differenza da $y_{x+\omega}$ a y_x; e se questa nuova funzione la rappresentiamo con Δy_x, ci verrà l' equazione $\Delta y_x = y_{x+\omega} - y_x$.

Questa Δy_x si chiama la *differenza finità prima*, o semplicemente *differenza* della funzione y_x.

Dunque la differenza finita di una funzione è una nuova funzione ricavata dalla prima mediante la regola qui sopra prescritta.

Trattando ora Δy_x come trattammo y_x, ne ricaveremo un' altra funzione la quale dipenderà da Δy_x, come questa dipendeva da y_x. Una tal funzione

chiamasi *differenza finita seconda* di y_x; ella si rappresenta con $\Delta\Delta y_x$, ovvero $\Delta^2 y_x$, ed è

$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\omega} - \Delta y_x.$$

Così $\Delta^3 y_x$ ci significherà d' ora in poi la *differenza finita terza* di y_x, e sarà

$\Delta^3 y_x = \Delta^2 y_{x+\omega} - \Delta^2 y_x$; e generalmente la *differénza finita ennesima* sarà

$$\Delta^n y_x = \Delta^{n-1} y_{x+\omega} - \Delta^{n-1} y_x.$$

§ 2. Le differenze pertanto delle cinque funzioni semplici x^m, a^x, $\log x$, $sen\ x$, $cos\ x$, saranno

$$\Delta x^m = (x+\omega)^m - x^m;$$

$$\Delta a^x = a^{x+\omega} - a^x = a^x(a^\omega - 1);$$

$$\Delta \log x = \log(x+\omega) - \log x = \log\left(1 + \frac{\omega}{x}\right);$$

$$\Delta\, sen\, x = sen\,(x+\omega) - sen\, x = sen\, x \cdot cos\,\omega + sen\,\omega \cdot cos\, x - sen\, x;$$

$$\Delta\, cos\, x = cos\,(x+\omega) - cos\, x = cos\, x \cdot cos\,\omega - sen\, x \cdot sen\,\omega - cos\, x;$$

e nello stesso modo si trova la differenza di ciascuna funzione composta, ponendovi $x+\omega$ in vece di x, e da ciò che essa allora diventa, sottraendo lei medesima; le trovate differenze finite possono svilupparsi in serie ordinate con le potenze positive intiere e crescenti di ω, ed allora esse sono:

$$\Delta x^m = mx^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}\omega^2 + \text{ecc.}$$

$$\Delta a^x = \omega a^x \log a + \frac{\omega^2}{2} a^x (\log a)^2 + \text{ecc.}$$

$$\Delta \log x = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{ecc.}$$

$$\Delta\, sen\, x = \omega \cos x - \frac{\omega^2}{1\cdot 2} sen\, x - \frac{\omega^3}{2\cdot 3} \cos x + \text{ecc.}$$

$$\Delta \cos x = -\omega\, sen\, x - \frac{\omega^2}{2} \cos x + \frac{\omega^3}{2\cdot 3} sen\, x + \text{ecc.}$$

Tutte queste serie per altro sono composte di un numero infinito di termini, eccettuata la prima. Se m è positivo ed intiero, allora facendo $m = 0, 1, 2, 3$ ecc. si ha

$\Delta x^0 = 0$; $\Delta x^1 = \omega$; $\Delta x^2 = 2x\omega + \omega^2$;

$\Delta x^3 = 3x^2\omega + 3x\omega^2 + \omega^3$; ecc. ecc.

§ 3. Cerchiamo le differenze finite di alcune funzioni composte, le quali potranno farci di bisogno.

$$\Delta x a^x = (x+\omega)a^{x+\omega} - xa^x = xa^x\left(a^\omega - 1\right) + \omega a^\omega \cdot a^x;$$

$$\Delta x^2 a^x = x^2 a^x\left(a^\omega - 1\right) + 2\omega a^\omega \cdot xa^x + \omega^2 a^\omega a^x;$$

$$\Delta x^3 a^x = x^3 a^x\left(a^\omega - 1\right) + 3\omega a^\omega \cdot x^2 a^x + 3\omega^2 a^\omega \cdot xa^x + \omega^3 a^\omega \cdot a^x; \text{ ecc. ecc.}$$

$$\begin{aligned}\Delta x^3\, sen\, x &= (x+\omega)^3 sen\,(x+\omega) - x^3 sen\, x \\ &= (x+\omega)^3 (\cos\omega \cdot sen\, x + sen\,\omega \cdot \cos x) - x^3 sen\, x \\ &= (\cos\omega - 1)\, x^3 sen\, x \\ &\quad + sen\, x\,(3x^2\omega\cos\omega + 3x\omega^2\cos\omega + \omega^3\cos\omega) \\ &\quad + x^3 \cos x \cdot sen\,\omega \\ &\quad + \cos x\,(3x^2\omega\, sen\,\omega + 3x\omega^2 sen\,\omega + \omega^3 sen\,\omega);\end{aligned}$$

Avrà dunque questa differenza finita l' aspetto, o, come suol dirsi, la forma seguente:

$$\Delta x^3\, sen\, x = Ax^3 sen\, x + sen\, x\,(Bx^2 + Cx + D) + ax^3 \cos x + \cos x\,(bx^2 + cx + d);$$

nella medesima maniera si troverà la differenza finita di $x^3 \cos x$, dotata di questa forma

$$\Delta x^3 \cos x = Ax^3 \cos x + \cos x\,(Bx^2 + Cx + D) - ax^3 sen\, x - sen\, x\,(bx^2 + cx + d);$$

essendo per ambedue queste differenze

$$A = \cos\omega - 1 \qquad a = \operatorname{sen}\omega$$
$$B = 3\omega\cos\omega \qquad b = 3\omega\operatorname{sen}\omega$$
$$C = 3\omega^2\cos\omega \qquad c = 3\omega^2\operatorname{sen}\omega$$
$$D = \omega^3\cos\omega\,; \qquad d = \omega^3\operatorname{sen}\omega\,;$$

Facil cosa si è ora comprendere sotto quali aspetti potrebbero porsi le differenze finite di $x^m \operatorname{sen} x$, $x^m \cos x$.

Facendo $y_x = x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$, e volendo che n sia un numero intiero e positivo, si ha $\Delta y_x = (x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)\big(x+(n+1)\omega\big)$ $-\,x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$, e quindi $\Delta y_x = (x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)(n+1)\omega$. Così posto $y_x = x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega)$, si ha (fatta l' opportuna riduzione)

$$\Delta y_x = x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots\big(x-(n-1)\omega\big)(n+1)\omega.$$

E per $y_x = \dfrac{1}{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)}$ si trova

$$\Delta y_x = -(n+1)\omega\,\frac{1}{x(x+\omega)\ldots(x+n\omega)\{x+(n-1)\omega\}}.$$

§ 4. In generale rappresentando con y_x, z_x due funzioni di x, la differenza finita della loro somma è $\Delta(y_x + z_x) = y_{x+\omega} + z_{x+\omega} - y_x - z_x = \Delta y_x + \Delta z_x$;

La differenza, cioè, della somma di due funzioni è eguale alla somma delle differenze di ciascuna di quelle funzioni;

E la differenza del prodotto di quelle è

$\Delta y_x \cdot z_x = y_{x+\omega}\cdot z_{x+\omega} - y_x \cdot z_x$; ma

$y_{x+\omega} = y_x + \Delta y_x$; $z_{x+\omega} = z_x + \Delta z_x$; dunque

$$\Delta y_x z_x = z_x \Delta y_x + y_x \Delta z_x + \Delta y_x \cdot \Delta z_x;$$

La differenza, cioè, del prodotto di due funzioni, è eguale alla prima funzione moltiplicata per la differenza della seconda, più la differenza della seconda moltiplicata per la prima funzione, più il prodotto delle due differenze.

Si potrebbero avere consimili regole per le differenze dei prodotti di un maggior numero di funzioni.

§ 5. Le differenze degli ordini superiori si ricavano dalle differenze degli ordini inferiori con la stessa regola con la quale le differenze prime ricavansi dalle funzioni; così

$$\Delta^2 x^m = \Delta\left(m x^{m-1}\omega + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}\omega^2 + \text{ecc.}\right)$$

$$= m\omega\Delta x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\omega^2\Delta x^{m-2} + \text{ecc.}$$

Differenziando la seconda differenza ottiensi la terza, e così di mano in mano; per esempio

$\Delta^2 x^3 = 3\omega\Delta x^2 + 3\omega^2\Delta x + \omega^3 = 6\omega^2 x + 6\omega^3$;

$\Delta^3 x^3 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\omega^3$; $\quad \Delta^4 x^3 = 0$;

Generalmente se m è un numero intiero e positivo, si ha

$$\Delta^m x^m = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots m\cdot\omega^m; \quad \Delta^{m+1} x^m = 0.$$

Per la funzione a^x si ha

$$\Delta^2 a^x = (a^\omega - 1)\,\Delta a^x = a^x\,(a^\omega - 1)^2;$$

$$\Delta^3 a^x = a^x\,(a^\omega - 1)^3; \quad \Delta^4 a^x = a^x(a^\omega - 1)^4; \text{ ecc.}$$

§ 6. La differenza finita di $y_x + C$; se C è una quantità indipendente dalla x, e per ciò costante rispetto ad essa x, è

$$\Delta(y_x + C) = y_{x+\omega} + C - y_x - C = y_{x+\omega} - y_x;$$

dunque la differenza finita è la medesima come se la costante C non vi fosse stata; ed è quella costante

intieramente svanita dal calcolo; dunque *la differenza prima di una funzione contiene o può supporsi contenere una costante di meno della funzione stessa.*

In quel modo che la differenza prima di una funzione può contenere una costante di meno della funzione stessa, così la differenza seconda può contenere due costanti di meno; la differenza terza, tre, ecc. Debbansi infatti prendere le differenze della funzione $y_x + A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Mx^m$, nella quale A, B, C, ... sono quantità costanti.

Indicando per z_x questa funzione, si avrà

$\Delta z_x = \Delta y_x + B\Delta x + C\Delta x^2 + \ldots\ldots + M\Delta x^m$, ove non trovasi più A;

$\Delta^2 z_x = \Delta^2 y_x + B\Delta^2 x + C\Delta^2 x^2 + \ldots\ldots + M\Delta^2 x^m$, ove non vi è neppure B, perchè è $\Delta^2 x = 0$;

$\Delta^3 z_x = \Delta^3 y_x + C\Delta^3 x^2 + \ldots\ldots + M\Delta^3 x^m$, ove manca anche C, perchè $\Delta^3 x^2 = 0$; ed in fine

$$\Delta^{m+1} z_x = \Delta^{m+1} y_x + M\Delta^{m+1} x^m = \Delta^{m+1} y_x$$

perchè $\Delta^{m+1} x^m = 0$.

§ 7. Riprendiamo le equazioni trovate al § 1;

$\Delta y_x = y_{x+\omega} - y_x$;

$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\omega} - \Delta y_x$;

. . . .

$\Delta^n y_x = \Delta^{n-1} y_{x+\omega} - \Delta^{n-1} y_x$;

Ponendo nella prima $x + \omega$ in vece di x, avremo $\Delta y_{x+\omega} = y_{x+2\omega} - y_{x+\omega}$: il valore di $\Delta y_{x+\omega}$ dato da questa equazione, e quello di Δy_x datoci

dalla prima sostituiscansi nella seconda, e si avrà
$\Delta^2 y_x = y_{x+2\omega} - 2y_{x+\omega} + y_x$.

Se in questa equazione poniamo di nuovo $x+\omega$ in vece di x, si ottiene
$\Delta^2 y_{x+\omega} = y_{x+3\omega} - 2y_{x+2\omega} + y_{x+\omega}$; ed i valori di $\Delta^2 y_x$ è di $\Delta^2 y_{x+\omega}$ da noi avuti, sostituiti che siano nella equazione terza, ci danno
$\Delta^3 y_x = y_{x+3\omega} - 3y_{x+2\omega} + 3y_{x+\omega} - y_x$;
e generalmente troviamo

$$\Delta^n y_x = y_{x+n\omega} - ny_{x+(n-1)\omega} + \frac{n(n-1)}{2} y_{x+(n-2)\omega} \ldots \pm ny_{x+\omega} \mp y_x;$$

Ove i coefficienti del secondo membro sono quegli stessi del binomio di Newton. La trovata espressione di $\Delta^n y_x$ può anche esser posta sotto questa forma $\Delta^n y_x = \left\{ y_{x+\omega} - 1 \right\}^n$ purchè nello sviluppo del secondo membro in vece di scrivere, per esempio, $\left(y_{x+\omega}\right)^m$, si scriva $y_{x+m\omega}$. Dunque la differenza finita $\Delta^n y_x$ si esprime, se si vuole, per le successive funzioni y_x, $y_{x+\omega}$, $y_{x+2\omega}$, ecc. *Vice versa* una di queste funzioni si può esprimere per le differenze finite, e si trova

$$y_{x+n\omega} = \Delta^n y_x + n\Delta^{n-1} y_x + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^{n-2} y_x + \ldots + n\Delta y_x + y_x;$$

oppure $y_{x+n\omega} = \{ \Delta y_x + 1 \}^n$ purchè nello sviluppo del secondo membro scrivasi, in vece di $\left(\Delta y_x\right)^m$, la differenza finita $\Delta^m y_x$.

§ 8. Veniamo ora alle differenze dell' equazioni. Rappresenti $\phi\,(x, y) = 0$ un' equazione qualunque tra due variabili x, y delle quali una, per esempio la y, è funzione dell' altra x.

Il valore di una di queste due variabili, della x per esempio, potendo esser qualunque, l'equazione continuerà ad esser vera e legittima, o come suol dirsi, *a sussistere*, anche se all' x sostituiremo $x + \omega$, essendo ω una quantità qualunque. Ora se la variabile y, che a causa di quell' equazione è considerata qual funzione dell' x, la rappresentiamo anche per y_x, la nostra equazione diverrà $\phi\left(x, y_x\right) = 0$, che si cangerà in $\phi\left(x + \omega, y_{x+\omega}\right) = 0$, ovvero $\phi\left(x + \omega, y_x + \Delta y_x\right) = 0$ quando ad x sostituiscasi $x + \omega$; la risoluzione poi di quest' ultima equazione ci darà il valore di Δy_x, cioè della differenza prima della funzione y_x, espresso con x, y, ω. Per esempio: avendosi l' equazione $y^2 + by = ax^2 + cx + e$ si troverà, dopo aver fatte le opportune riduzioni, $(\Delta y)^2 + (2y + b)\,\Delta y = a\omega^2 + (2ax + c)\omega$. da cui

$$\Delta y = -\frac{2y+b}{2} \pm \sqrt{\left\{a\omega^2 + (2ax+c)\omega + \left(\frac{2y+b}{2}\right)^2\right\}}.$$

§ 9. Nella stessa guisa aver potremo la differenza seconda $\Delta^2 y$ di y, la terza $\Delta^3 y$, ecc. allora che il valore di y sarà dato da un' equazione $\phi\,(x, y) = 0$, che è quanto a dire in linguaggio algebratico, quando y sarà una funzione *implicita* di x. Infatti sostituendo $x + \omega$ all' x nell' equazione $\phi\left(x + \omega, y_{x+\omega}\right) = 0$,

avremo $\phi\left(x+2\omega,\ y_{x+2\omega}\right)=0$, ovvero

$\phi\,(x+2\omega,\ y+2\Delta y+\Delta^2 y)=0$, da cui ricaveremo il valore di $\Delta^2 y$. Così il valore di $\Delta^3 y$ ci sarà dato dall'equazione

$\phi\,(x+3\omega,\ y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)=0$; ecc.

§ 10. Dall' equazione $\phi\,(x,y)=0$ . . . (1) abbiamo derivate quest' altre equazioni

(2) . . . $\phi\left(x+\omega,\ y_{x+\omega}\right)=0$, ovvero

$\phi\,(x+\omega,\ y+\Delta y)=0$;

(3) . . . $\phi\left(x+2\omega,\ y_{x+2\omega}\right)=0$, ovvero

$\phi\,(x+2\omega,\ y+2\Delta y+\Delta^2 y)=0$;

(4) . . . $\phi\left(x+3\omega,\ y_{x+3\omega}\right)=0$, ovvero

$\phi\,(x+3\omega,\ y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y)=0$; ecc.

Ciascuna di queste equazioni sussiste insieme con la proposta $\phi\,(x,y)=0$, ed appartiene in conseguenza alla stessa relazione di variabili cui appartiene questa proposta medesima. Anche una combinazione qualunque delle ritrovate equazioni è una nuova equazione che sussiste ed è vera quando lo è $\phi\,(x,y)=0$.

Se in una di queste combinazioni trovasi il Δy ovvero $y_{x+\omega}$, l' equazione nella quale consiste questa combinazione, chiamasi equazione con le *differenze prime*, o *del primo ordine*: se vi si contiene il $\Delta^2 y$, ovvero, $y_{x+2\omega}$, chiamasi con le *differenze seconde*, o *del secondo ordine*, e così via via. Rappresentando con $\phi=0$ l' equazione (1), e con $\phi'=0$, $\phi''=0$, $\phi'''=0$, ecc. le (2), (3), (4) ecc., si può dimostrare questo nuovo teorema importantissimo.

Tutte le diverse combinazioni che si possono fare con le due equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$ danno dei risultamenti in apparenza diversi, ma che sono in sostanza la medesima cosa, potendo sempre ridursi l'uno all' altro.

Rappresentiamo per $F(\phi, \phi')$, $f(\phi, \phi')$ due funzioni qualunque delle quantità ϕ, ϕ', e tali che divengano nulle quando $\phi = 0$, $\phi' = 0$. Dalle due equazioni $F(\phi, \phi') = 0$, $f((\phi, \phi') = 0$ saranno rappresentate due qualunque combinazioni fatte con le equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, e conviene dimostrare che queste due equazioni sono in sostanza la cosa medesima, in quanto che si riducono l' una all' altra. Infatti può sempre farsi $F(\phi, \phi') = f(\phi, \phi') + \Psi(\phi, \phi')$, {essendo $\Psi(\phi, \phi')$ una funzione di ϕ, ϕ', che si annulla quando $\phi = 0$, $\phi' = 0$}: ora siccome $\Psi(\phi, \phi')$ si annulla da sè medesima, così $F(\phi, \phi') = 0$ sarà la cosa stessa che $f(\phi, \phi') = 0$.

Riflettendo un momento sulle quantità di cui sono formate le funzioni ϕ, ϕ', si vedrà che qualunque combinazione $F(\phi, \phi') = 0$ è un' equazione tra x, y e Δy; ciò premesso, dimostriamo questo altro nuovo teorema non meno importante del primo.

Se dalle due equazioni differenziali del primo ordine $F(\phi, \phi') = 0$, $f(\phi, \phi') = 0$, *le quali nascono dal combinare in due modi qualunque diversi le equazioni* $\phi = 0$, $\phi' = 0$, *si elimina la differenza finita* Δy, *il risultamento della eliminazione sarà una nuova equazione la quale sarà in sostanza la stessa* $\phi = 0$, *potendo sempre ad essa ridursi.*

Infatti per eliminare da quelle due equazioni Δy basta che si elimini la funzione ϕ' che la contiene, e si avrà allora per risultamento una equazione di questa forma $\Psi(\phi) = 0$, la quale manifestamente riducesi a $\phi = 0$.

§ 11. E per le equazioni colle differenze del secondo ordine si può dimostrare che *tutte le equazioni che si possono avere combinando, in qualunque modo si voglia, quelle tre equazioni* $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$

sono altrettante equazioni in apparenza diverse, ma in sostanza le stesse, una potendosi sempre ridurre all' altra.

In fatti $F(\phi, \phi', \phi'') = 0$ essendo una di queste combinazioni e $f(\phi, \phi', \phi'') = 0$ essendone una qualunque altra, si proverà, come qui sopra, che queste sono sempre riducibili una all' altra. Per queste equazioni colle differenze dell' ordine secondo si può anche dimostrare un teorema compagno a quello dimostrato per le equazioni del primo: cioè *Se da tre equazioni colle differenze seconde* $F(\phi, \phi' \phi'') = 0$, $f(\phi, \phi', \phi'') = 0$, $\Psi(\phi, \phi', \phi'') = 0$, *le quali nascono combinando in tre modi diversi le tre equazioni* $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$, *si eliminano le differenze finite* Δy, $\Delta^2 y$, *il risultamento della eliminazione sarà una nuova equazione la quale non sarà in sostanza che la stessa* $\phi = 0$, *potendo sempre a questa ridursi.*

§ 12. Per le equazioni colle differenze degli ordini superiori vi hanno simili teoremi i quali facilmente potrà ritrovare chi avrà bene compresi quelli dimostrati qui sopra. Io non mi vi trattengo, e piuttosto considero quelle combinazioni le quali conducono all' eliminazione delle costanti.

Se l' equazione $\phi(x, y) = 0$ contiene alcune costanti a, b, c, ecc., queste si ritrovano anche nelle equazioni $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$, ecc.; dunque se col mezzo dell' equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$ si elimina la costante a, si avrà con questa combinazione una equazione tra x, y e Δy colle differenze prime, la quale conterrà una costante di meno della $\phi = 0$.

Se col mezzo delle tre equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$ eliminiamo due costanti a, b, otterremo una equazione colle differenze seconde tra $x, y, \Delta y, \Delta^2 y$, la quale conterrà due costanti di meno della $\phi = 0$. In generale col numero $m + 1$ di equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0, \ldots \phi^m = 0$ potremo eliminare un numero m di costanti, ed il risultamento di questa eliminazione sarà un' equazione colle differenze dell' ordine *emmesimo*; per esempio, se si ha l' equazione

$y^2 = ax$, ricaveremo da essa $\left(y_{x+\omega}\right)^2 = a\,(x+\omega)$, e per mezzo di queste due equazioni eliminando a, avremo $x\,\left(y_{x+\omega}\right)^2 = y^2_x\,(x+\omega)$, ovvero

$x\left(y^2 + 2y\Delta y + \overline{\Delta y}^2\right) = y^2\,(x+\omega)$, ovvero

$2yx\Delta y + x\overline{\Delta y}^2 = \omega y^2$, equazione colle differenze prime; in questa non trovasi più la costante a che era nell' equazione proposta.

CAPO II.

Differenze delle funzioni di più variabili.

§ 13. Tratterò delle funzioni di due variabili, e da queste sarà facile passare a quelle che ne contengono un maggior numero. Rappresenti $z_{x,y}$ una funzione delle due variabili x, y, e con le lettere ω, θ si rappresentino gli aumenti loro. Quando le due variabili x, y crescono nello stesso tempo, si hanno le differenze *totali*; quando crescono ad una per volta, le *parziali*. Così $\Delta z_{x,y} = z_{x+\omega,\,y+\theta} - z_{x,y}$ è la differenza totale prima di $z_{x,y}$;

$\Delta^2 z_{x,y} = \Delta z_{x+\omega,\,y+\theta} - \Delta z_{x,y} = z_{x+2\omega,\,y+2\omega} - 2z_{x+\omega,\,y+\omega} + z_{x,y}$ è la differenza totale seconda di $z_{x,y}$;

$\Delta^n z_{x,y} = \Delta^{n-1} z_{x+\omega,\,y+\theta} - \Delta^{n-1} z_{x,y}$ è la differenza totale ennesima di $z_{x,y}$. Si vede pertanto che le differenze totali delle funzioni di più variabili si ottengono nella stessa guisa delle differenze

delle funzioni di una sola variabile; e per conseguenza noi troviamo come al § 7

$\Delta^n z_{x,\, y} = \left(z_{x+\omega,\, y+\theta} - z_{x,\, y}\right)^n$, purchè nello sviluppo del secondo membro, in vece di scrivere le potenze $\left(z_{x+\omega,\, y+\theta}\right)^m$, si scriva $z_{x+m\omega,\, y+m\theta}$.

Egualmente si trova $z_{x+n\omega,\, y+n\theta} = \left(\Delta z_{x,\, y} + 1\right)^n$, purchè nello sviluppo del secondo membro gli esponenti si diano per indici alla caratteristica Δ.

§ 14. Ecco alcuni esempj delle differenze totali,

(1) . . . $\Delta\,(x + y) = \omega + \theta$;

(2) . . . $\Delta\,(x^2 + y) = 2x\omega + \omega^2 + \theta$;

(3) . . . $\Delta\,(x^3 + y) = 3x^2\omega + 3x\omega^2 + \omega^3 + \theta$;

(4) . . . $\Delta\,(x^2 + y^2) = 2x\omega + \omega^2 + 2y\theta + \theta^2$;

(5) . . . $\Delta\,(x^3 + y^2) = 3x^2\,\omega + 3x\omega^2 + \omega^3 + 2y\theta + \theta^2$;

(6) . . . $\Delta\,(xy) = x\theta + y\omega + \omega\theta$

(7) . . . $\Delta\,(x^2y) = x^2\theta + 2xy\omega + 2x\omega\theta + \omega^2 y + \omega^2\theta$

(8) . . . $\Delta\,(x^3y) = x^3\theta + 3x^2\omega\theta + 3x^2y\omega + 3x\omega^2\theta + 3xy\omega^2 + \omega^3 y + \omega^3\theta$

(9) . . $\Delta\,(x^3y^2) = 3x^2y^2\omega + 3xy^2\omega^2 + \omega^3y^2 + 2x^3y\theta + 6x^2y\theta\omega + 6xy\theta\omega^2 + 2y\theta\omega^3 + x^3\theta^2 + 3x^2\omega\theta^2 + 3x\omega^2\theta^2 + \omega^3\theta^2$.

Ciò basti per le differenze totali delle funzioni algebraiche. Rispetto a quelle delle trascendenti, si cerchino le differenze di *sen x cos y*; *sen x sen y*; *cos x sen y*; *cos x cos y*; e troveremo

Δ *sen x cos y* = *sen* $(x + \omega)$ *cos* $(y + \theta)$ — *sen x cos y* :

la differenza totale di *sen x cos y* avrà dunque questa forma :

Δ *sen x cos y* = A *sen x sen y* + B *sen x cos y* + C *sen y cos x* + D *cos x cos y*.

Così le differenze totali delle altre funzioni avranno le forme seguenti

$$\Delta\, sen\, x\, sen\, y = A'\, sen\, x\, sen\, y + B'\, sen\, x\, cos\, y + C'\, sen\, y\, cos\, x + D'\, cos\, x\, cos\, y\,;$$

$$\Delta\, cos\, x\, sen\, y = A''\, sen\, x\, sen\, y + B''\, sen\, x\, cos\, y + C''\, sen\, x\, cos\, y + D''\, cos\, x\, cos\, y\,;$$

$$\Delta\, cos\, x\, cos\, y = A'''\, sen\, x\, sen\, y + B'''\, sen\, x\, cos\, y + C'''\, sen\, x\, cos\, y + D'''\, cos\, x\, cos\, y.$$

Le quantità A, A', ecc., B, B', ecc. sono funzioni di $sen\, \omega$, $cos\, \omega$, $sen\, \theta$, $cos\, \theta$, ben facili a determinarsi.

Otterremo le differenze degli ordini superiori, per esempio le differenze totali seconde, prendendo le differenze prime delle già ritrovate differenze; per avere le differenze terze, si prenderanno le differenze prime delle differenze seconde, ecc., avremo dunque $\Delta^2 (x+y) = 0$, $\Delta^2 (x^2 + y) = 2\omega^2$, ecc.

§ 15. Quand'anche alle funzioni, delle quali prese abbiamo le differenze, fossero unite alcune costanti, quelle differenze sarebbero state le stesse; ed anche le stesse si sarebbero conservate se in vece di costanti vi fossero state unite alcune funzioni della quantità $x\theta - y\omega$, perchè $\phi\, (x\theta - y\omega) = \phi\, \{(x + \omega)\, \theta - (y + \theta)\, \omega\}$. Nel prendere poi una differenziale totale del primo ordine potrà svanire una costante; due ne potranno andar via nel prendere una differenza del secondo; tre per una differenza di terzo, e così di mano in mano.

§ 16. Le differenze parziali possono prendersi supponendo che cresca una variabile per volta; allora si dice *prendere le differenze riguardo o rispetto a quella variabile*. Così nel nostro caso si prendono le differenze o rispetto alla variabile x, o rispetto alla y.

$z_{x+\omega,\, y} - z_{x,\, y}$ è la differenza parziale di

$z_{x,\,y}$ rispetto all' x; $z_{x,\,y+\theta} - z_{x,\,y}$ è la differenza parziale di $z_{x,\,y}$ rispetto all' y.

Anco le differenze parziali sono rappresentate da Δ, ma al disotto della funzione da differenziarsi si pone la variabile riguardo alla quale dobbiamo differenziare, separandola con una linea curva; così $\underbrace{\Delta z_{x,\,y}}_{x}$ rappresenta la differenza prima riguardo all' x; $\underbrace{\Delta z_{x,\,y}}_{y}$ la differenza prima riguardo all'y; e semplicemente (§ 13) $\Delta z_{x,\,y}$ la differenza totale: è dunque

$$\underbrace{\Delta z_{x,\,y}}_{x} = z_{x+\omega,\,y} - z_{x,\,y},$$

$$\underbrace{\Delta z_{x,\,y}}_{y} = z_{x,\,y+\theta} - z_{x,\,y}.$$

Considerando il seguente prospetto, vedremo come debbono prendersi le differenze parziali del secondo ordine, e come debbono scriversi:

Differenza seconda riguardo all' x

$$\underbrace{\Delta^2 z_{x,\,y}}_{x^2} = z_{x+2\omega,\,y} - 2z_{x+\omega,\,y} + z_{x,\,y}$$

Differenza seconda riguardo all' y

$$\underbrace{\Delta^2 z_{x,\,y}}_{y^2} = z_{x,\,y+2\theta} - 2z_{x,\,y+\theta} + z_{x,\,y}$$

Differenza seconda riguardo all' x ed all' y successivamente

$$\underbrace{\Delta^2 z_{x,\,y}}_{xy} = z_{x+\omega,\,y+\theta} - z_{x+\omega,\,y}$$

$$- z_{x,\,y+\theta} + z_{x,\,y}.$$

Generalmente per esprimere una differenziale $(m+n)^{esima}$ parziale di $z_{x,y}$, presa m volte riguardo all' x, ed n volte all'y, si scrive $\Delta^{m+n} z_{\underbrace{x,y}_{x^m y^n}}$.

L' operazione per avere le differenze parziali non ha alcuna difficoltà; poichè nel prendere una differenza consideriamo costanti tutte le variabili, eccettuata quella riguardo a cui si vuol differenziare.

§ 17. Prendendo la differenza seconda di $z_{x,y}$ prima rispetto all' y, poi rispetto all' x, otteniamo per $\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{yx}}$ una espressione la quale agguaglia quella ritrovata qui sopra per $\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{yx}}$; è dunque indifferente la via da eseguirsi nel prendere la differenza seconda di $z_{x,y}$ riguardo all' x ed all' y successivamente; generalmente non sarà difficile dimostrare, che per avere la differenza $\Delta^{m+n} z_{\underbrace{x,y}_{x^m y^n}}$, possiamo seguire nel differenziare quella via che più ci piace: si può differenziare un certo numero di volte riguardo all' x, quindi differenziare riguardo all' y, poi tornare a differenziare riguardo all' x, come si vuole, poichè avremo sempre lo stesso risultamento: conviene però che, ad operazione finita, le differenziazioni riguardo all' x siano m di numero, e quelle riguardo all' y siano n di numero.

Il superiore algorismo per rappresentare le differenze quanto è chiaro e semplice allora che trattasi soltanto di differenze totali, altrettanto diverrebbe imbarazzante e confuso se volessero rappresentarsi

con esso le differenze parziali delle differenze totali e *vice versa*: allora per rappresentare le differenze totali sarebbe necessario adoperare un' altra lettera divisa dal Δ.

Ma tale inesattezza d' algorismo non ha alcun effetto: vaglia per ogni cautela averla avvertita.

§ 18. Abbiamo trovato al § antecedente

$$\Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x+\omega,y} - z_{x,y+\theta} + z_{x,y}$$

$$\Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} = z_{x+\omega,y} - z_{x,y},$$

$$\Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} = z_{x,y+\theta} - z_{x,y}: \text{ dunque}$$

$$\Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} + \Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} + \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x,y};$$

ma (§ 27) $z_{x+\omega,y+\theta} - z_{x,y} = \Delta z_{x,y}$ dunque

$$\Delta z_{x,y} = \Delta z_{\underbrace{x,y}_{x}} + \Delta z_{\underbrace{x,y}_{y}} + \Delta^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}}; \text{ e di qui il}$$

teorema:

La differenza totale della funzione $z_{x,y}$ *delle due variabili* x *ed* y *è eguale alla somma delle tre differenze parziali della stessa funzione, cioè alla differenza prima parziale riguardo all'* x, *più alla differenza prima parziale riguardo all'* y, *più alla differenza seconda parziale presa riguardo all'* x, *poi riguardo all'* y.

Potrebbero trovarsi altri teoremi per le differenze degli ordini superiori.

§ 19. Ecco alcuni esempj delle differenze parziali, che ci faranno di bisogno.

$$(1) \,.\,.\, \Delta^2 \frac{xy}{xy} = \omega\theta.$$

$$(2) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^2y}_{xy} = 2\omega\theta x + \omega^2\theta.$$

$$(3) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^3y}_{xy} = 3\theta\omega x^2 + 3\theta\omega^2 x + \omega^3\theta.$$

$$(4) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^4y}_{xy} = 4\theta\omega x^3 + 6\theta\omega^2 x^2 + 4\theta\omega^3 x + \omega^4\theta.$$

$$(5) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^2y^2}_{xy} = 4\theta\omega xy + 2\theta\omega^2 y + 2\omega\theta^2 x + \omega^2\theta^2.$$

$$(6) \ldots \Delta^2 \underbrace{x^3y^2}_{xy} = 6\theta\omega x^2 y + 6\theta\omega^2 xy + 2\theta\omega^3 y + 3\omega\theta^2 x^2 + 3\omega^2\theta^2 x + \omega^3\theta^2.$$

In generale rappresentando con z_x una funzione dell' x, e con u_y una funzione dell' y, avremo

$$(7) \ldots \Delta^2 \underbrace{z_x \cdot u_y}_{xy} = \Delta z_x \cdot \Delta u_y.$$ Così

$$\Delta^3 \underbrace{x^2y}_{x^2y} = 2\omega^2\theta \,;\; \Delta^3 \underbrace{x^3y}_{x^2y} = 3\theta\omega^2 \,(2x + \omega) + 3\theta\omega^3 \text{ ec.}$$

I risultamenti ottenuti nelle superiori differenziazioni sarebbero stati gli stessi, anche quando alle funzioni, che abbiamo differenziate, io avessi aggiunto $\phi(x) + \Psi(y)$, essendo $\phi(x)$ una funzione qualunque dell'x, e $\Psi(y)$ una funzione qualunque dell' y; così, per esempio, la differenza parziale seconda di $x^2y + \phi(x) + \Psi(y)$ sarebbe stata egualmente $2\omega\theta x + \omega^2\theta$, come era la differenza di x^2y.

§ 21. Rappresenti $\phi(x, y, z) = 0$ una equazione fra le tre variabili a, y, z. Di queste potremo sempre considerare una come funzione delle altre. Riguardiamo z come funzione dell'x e dell' y, e rappresentandola con $z_{x,\,y}$, scriviamo così l' equazione

$$\phi\left(z_{x,\,y}, x, y\right) = 0.$$

Questa equazione essendo vera per qualunque valore a noi piaccia di dare all' x ed all' y, potremo sostituirvi $x+\omega$ all' x, ed $y+\theta$ all' y, senza che questa cessi di mantenersi vera: ricaveremo dunque da essa queste tre equazioni:

$$(1) \ldots \phi\left(z_{x+\omega,\,y},\, x+\omega,\, y\right)=0$$

$$(2) \ldots \phi\left(z_{x,\,y+\theta},\, x,\, y+\theta\right)=0$$

$$(3) \ldots \phi\left(z_{x+\omega,\,y+\theta},\, x+\omega,\, y+\theta\right)=0$$

le quali staranno insieme con lei.

Ciascuna di queste equazioni (1), (2), (3) ci dà altre tre equazioni: così l' equazione (1) ci dà

$$(4) \ldots \phi\left(z_{x+2\omega,\,y},\, x+2\omega,\, y\right)=0$$

$$(5) \ldots \phi\left(z_{x+\omega,\,y+\theta},\, x+\omega,\, y+\theta\right)=0$$

$$(6) \ldots \phi\left(z_{x+2\omega,\,y+\theta},\, x+2\omega,\, y+\theta\right)=0.$$

L' equazione (2) ci dà

$$(7) \ldots \phi\left(z_{x+\omega,\,y+\theta},\, x+\omega,\, y+\theta\right)=0$$

$$(8) \ldots \phi\left(z_{x,\,y+2\theta},\, x,\, y+2\theta\right)=0$$

$$(9) \ldots \phi\left(z_{x+\omega,\,y+2\theta},\, x+\omega,\, y+2\theta\right)=0.$$

L' equazione (3) ci dà

$$(10) \ldots \phi\left(z_{x+2\omega,\,y+\theta},\, x+2\omega;\, y+\theta\right)=0$$

$$(11) \ldots \phi\left(z_{x+\omega,\,y+2\theta},\, x+\omega,\, y+2\theta\right)=0$$

$$(12) \ldots \phi\left(x+2\omega,\, y+2\theta,\, z_{x+2\omega,\,y+2\theta}\right)=0.$$

Di tutte queste dodici equazioni la (3), la (5) e la (7) sono la stessa; la (6) e la (10) sono parimente la stessa; la (9) e la (11) sono anche la stessa: in questa guisa esse si riducono ad otto equazioni diverse che sussistono assieme alla proposta $\phi\left(z_{x,\,y},\, x,\, y\right)=0$.

Da quelle otto si potrebbero cavare delle altre ancora, e così di mano in mano.

§ 22. Sussistendo insieme alla proposta le equazioni (1), (2), (3) ecc. qualunque combinazione di esse sussisterà nel tempo stesso: le differenze adunque dell'equazione $\phi\left(z_{x,y}, x, y\right)=0$, siano parziali, siano totali, sussisteranno insieme all'equazione stessa $\Delta=0$: così, per esempio,

$$\Delta^2 \frac{\phi}{xy}=\phi\left(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta\right)$$
$$-\phi\left(z_{x,y+\theta}, x, y+\theta\right)-\phi\left(z_{x+\omega,y}, x+\omega, y\right)$$
$$+\phi\left(z_{x,y}, x, y\right)=0.$$

Si dà il nome d' *Equazioni colle differenze parziali* a quelle equazioni che sono o possono considerarsi essere una combinazione qualunque delle (1), (2), (3), ecc. Si chiamano del *primo ordine* quando contengono

$z_{x+\omega,y}$ e $z_{x,y+\theta}$: si chiamano del *secondo* quando contengono alcune delle funzioni

$z_{x+2\omega,y}$, $z_{x+\omega,y+\theta}$, $z_{x,y+2\theta}$: si chiamano del *terzo* quando contengono alcune delle funzioni

$z_{x+3\omega,y}$, $z_{x+2\omega,y+\theta}$, $z_{x+\omega,y+2\theta}$, $z_{x,y+3\theta}$,

e generalmente si chiamano dell' n^{esimo} ordine, quando esse contengono alcune funzioni di questa forma

$z_{x+(n-m)\omega,y+m\theta}$.

§ 23. Supponiamo che la proposta equazione $\phi\left(z_{x,y}, x, y\right)=0$ contenga alcune costanti arbitrarie: queste si troveranno anche nell' equazioni (1), (2), (3), (4), ecc. Ora colla proposta e colle

equazioni (1), (2) potremo eliminare due costanti arbitrarie, ed otterremo un' equazione colle differenze parziali del primo ordine, la quale conterrà due costanti di meno della proposta: così se colla proposta e con tutte le ritrovate equazioni diverse che sono otto di numero, si eliminano otto costanti arbitrarie, avremo un' equazione del secondo ordine, la quale non mancherà di alcuna di quelle funzioni

$z_{x+2\omega,y}, z_{x+\omega,y+\theta}, z_{x,y+2\theta}$, conterrà otto costanti di meno della proposta, e sarà vera insieme con essa. Nel modo stesso potrebbe dalla proposta dedursi un' equazione del terzo ordine colle differenze finite e parziali, che fosse vera insieme con lei, e contenesse un certo numero di costanti di meno di essa.

Anzi le quantità che si eliminano possono essere anco funzioni delle variabili. Abbiasi in fatti l' equazione

$\varphi(z_{x,y}, x, y, u_y, p_x) = 0$ nella quale u_x e p_x rappresentano funzioni determinate o indeterminate dell' x e dell' y rispettivamente.

Insieme con la proposta (§ 21) sussiste ancora questa equazione

$\varphi(z_{x+\omega,y}, x+\omega, y, p_{x+\omega}, u_y) = 0$: ora se col mezzo di quest' ultima e della proposta medesima eliminiamo la funzione u_y, avremo una nuova equazione che rappresenteremo per

$(a) \ldots \Psi(z_{x+\omega,y}, x+\omega, x, y, p_x, p_{x+\omega}) = 0$,

la quale non conterrà alcun vestigio della funzione u_y.

Sussistendo quest' ultima equazione, sussisteranno con essa ancora quest' altre due

$\Psi(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, x, y+\theta, p_x, p_{x+\omega}) = 0$,

$\Psi(z_{x+\omega,y+2\theta}, x+\omega, x, y+2\theta, p_x, p_{x+\omega}) = 0$.

le quali si hanno col sostituire $y+\theta$ in vece dell'y.

Per mezzo di queste due ultime equazioni e della (a) potremo eliminare le due funzioni p_x, $p_{x+\omega}$, ed avremo in fine un' equazione fra

$x, y, z_{x,y}, z_{x+\omega,y}, z_{x+\omega,y+\theta}, z_{x+\omega,y+2\theta}$,

la quale non conterrà più le due funzioni p_x, u_y. Questa sarà un' equazione colle differenze parziali del terzo ordine; così per eliminare due funzioni da una equazione, è stato necessario passare alle equazioni a differenze parziali del terzo ordine: può accadere però che bastino per questo l' equazioni colle differenze parziali del secondo ordine:

Per esempio $u_{\theta x+\omega y}$, $p_{\theta x+\omega y}$, funzioni diverse della quantità variabile $\theta x+\omega y$, si ritrovino nell' equazione

$\phi\left(z_{x,y}, x, y, u_{\theta x+\omega y}\right)=0$. Insieme con essa sussistono queste tre equazioni

$$\phi\left(z_{x+2\omega,y}, x+2\omega, y, u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}\right)=0$$

$$\phi\left(z_{x+\omega,y+\theta}, x+\omega, y+\theta, u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}\right)=0$$

$$\phi\left(z_{x,y+2\theta}, x, y+2\theta, u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}, p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}\right)=0$$

dalle quali eliminando

$u_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}$, $p_{\theta x+\omega y+2\omega\theta}$, avremo un' equazione colle differenze parziali del secondo ordine che non conterrà quelle funzioni.

§ 24. L' equazioni colle differenze parziali sono molto più generali di quelle dalle quali per mezzo dell' eliminazione delle funzioni, sono state ricavate, perchè appartengono alla stessa relazione di variabili, e sono indipendenti dal valore delle funzioni eliminate.

I due aumenti delle variabili x, y, che noi abbiamo rappresentati con ω e θ, sogliono ancora rappresentarsi con Δx e Δy: essi in fatti sono le differenze delle variabili x ed y. Per lo più si suppongono costanti, ma può ancora estendersi il calcolo delle differenze finite a considerarli variabili: le regole della differenziazione però sono le stesse.

CAPO III.

Integrazione delle differenze delle funzioni di una sola variabile.

§ 25. Chiamasi *integrale* o *somma* di una funzione quella funzione, la differenza della quale è la stessa funzione proposta; così la somma di $2\omega x + \omega^2$ è x^2, perchè appunto $\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2$.

Ai nomi integrale o somma si aggiunge, *prima*, *seconda*, ecc. *ennesima*, se la funzione, di cui cercasi l' integrale, si risguarda come una differenza prima, seconda, ecc. *ennesima*.

Queste somme si rappresentano col segno Σ, al quale si pone nel luogo degli esponenti un numero, chiamato *indice*, eguale all' ordine della somma: si scrive per esempio Σ^4, Σ^3, ecc. Σ^n, e questo segno si pone avanti la funzione da sommarsi; così rappresentando con u una funzione di x, Σu, $\Sigma^2 u$, $\Sigma^3 u$, ecc. significano le somme prima, seconda, terza, ecc. di u, cioè quelle altre funzioni le cui differenze prima, seconda, terza, ecc. sono la stessa u. Dunque se y_x è la somma ennesima di z_x, si avrà $y_x = \Sigma^n z_x$, perchè $\Delta^n y_x = z_x$, e di qui $\Delta^n \Sigma^n z_x = z_x$. Questa operazione di sommare o integrare le funzioni è appunto il rovescio di quella di prendere le differenze, e disfà ciò che fece questa seconda operazione.

§ 26. Parliamo delle somme prime.

Per prendere la somma del polinomio $u_x + z_x$ basta prendere la somma dei suoi due termini, cioè $\Sigma(u_x + z_x) = \Sigma u_x + \Sigma z_x$; in fatti rappresentando con z'_x, u'_x due funzioni di x, è sempre $\Delta(u'_x + z'_x) = \Delta u'_x + \Delta z'_x$: e quindi $u'_x + z'_x = \Sigma(\Delta u'_x + \Delta z'_x)$; ma $u'_x = \Sigma \Delta u'_x$, $z'_x = \Sigma \Delta z'_x$, dunque $\Sigma \Delta u'_x + \Sigma \Delta z'_x = \Sigma(\Delta u'_x + \Delta z'_x)$; ora facciamo $\Delta u'_x = u_x$, $\Delta z'_x = z_x$, ed avremo $\Sigma(u_x + z_x) = \Sigma u_x + \Sigma z_x$.

Se dunque vogliamo la somma y_x del polinomio $a + bx + cx^2 + \ldots px^m$, avremo

$$y_x = \Sigma(a + bx + cx^2 + \ldots + px^m) = a\Sigma x^0 + b\Sigma x + \ldots + p\Sigma x^m.$$

Converrà pertanto cercare la somma di x^0, x^1, x^2, ecc. x^m.

Ora essendo $\Delta x = \omega = \omega \cdot 1 = \omega \cdot x^0$, si ha subito $\omega\Sigma 1 = \omega\Sigma x^0 = x$, $\Sigma x^0 = \frac{x}{\omega}$; dunque $a\Sigma x^0 = \frac{ax}{\omega}$.

Così pure dall' equazione $\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2$ si ricava $x^2 = 2\omega\Sigma x + \omega^2\Sigma 1 = 2\omega\Sigma x + \omega x$, e di qui

$$\Sigma x = \frac{x(x-\omega)}{2\omega};$$

Dall' equazione $\Delta x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$, si ha $x^3 = 3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + \omega^3\Sigma 1$, e di qui

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{2 \cdot 3} = \frac{x(x-\omega)(2x-\omega)}{2 \cdot 3 \cdot \omega};$$

Per la stessa via troveremo

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega x^2}{4}.$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{x^4}{2} + \frac{\omega x^3}{3} - \frac{\omega^3}{30}\text{ ; ecc.}$$

Ma onde ottenere la somma di x^m, supponiamo $\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} +$ ecc., e prendendo la differenza di questa equazione si ha
$x^m = A\Delta x^{m+1} + B\Delta x^m + C\Delta x^{m-1} +$ ecc., ovvero

$$x^m = A(m+1)\omega x^m$$
$$+ A\frac{(m+1)m}{2}\omega^2 x^{m-1} + A\frac{(m+1)(m)(m-1)}{2\cdot 3}\omega^3 x^{m-2} + \text{ec.}$$
$$+ Bm\omega x^{m-1} \quad + B\frac{m(m-1)}{2}\omega^2 x^{m-2} + \text{ec.}$$
$$+ C(m-1)\omega x^{m-2} + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.} \qquad + \text{ecc.}$$

dunque

$$A = \frac{1}{(m+1)\omega};$$

$$B = -\frac{A(m+1)\omega}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$C = -\frac{A(m+1)m}{2\cdot 3}\omega^2 - \frac{Bm}{2}\omega\text{ ; ecc.}$$

Non vi sarà dunque più alcuna difficoltà a trovare il valore dell' y_x.

Per esempio : fatto $m = 3$, si avrà
$y_x = \Sigma(a + bx + cx^2 + ex^3) = a\Sigma 1 + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + e\Sigma x^3$;

e fatte le opportune sostituzioni,

$$y_x = \left(\frac{a}{\omega} - \frac{b}{2} + \frac{c\omega}{6}\right) x + \left(\frac{b}{2\omega} - \frac{c}{2} + \frac{e\omega}{4}\right) x^2 +$$

$$\left(\frac{c}{3\omega} - \frac{e}{2}\right) x^3 + \frac{ex^4}{4\omega};$$ a questo, come a qualunque altro integrale conviene aggiungere una costante arbitraria C; e la ragione sta in questo che la differenza dell'$y_x + C$ è la stessa che quella dell'y_x.

Alle somme o integrali cui sono aggiunte le opportune costanti si dà il nome di *completi*.

§ 27. Vogliasi ora la somma completa di $x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$.

Avendo trovato al § 3

$$\Delta x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega) =$$
$$(n+1)\,\omega\,(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)$$

ne ricaveremo

$$\Sigma\,(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega) =$$
$$\frac{x(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega)}{(n+1)\,\omega};$$

e ponendovi $x-\omega$ in vece dell' x, e di poi $n+1$ in vece dell'n, troveremo

$$\Sigma x\,(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+n\omega) =$$
$$\frac{(x-\omega)\,x\,(x+\omega)\ldots(x+n\omega)}{(n+2)\,\omega} + C.$$

Per aver la somma del prodotto $x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega)$, si osservi che (§ 3)

$$\Delta x(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega) =$$
$$(n+1)\,\omega x\,(x-\omega)(x-2\omega)\ldots\{x-(n-1)\,\omega\},$$

e di qui

$$\Sigma x\,(x-\omega)\ldots\{x-(n-1)\,\omega\}=\frac{x\,(x-\omega)\,(x-2\omega)\ldots(x-n\omega)}{(n+1)\,\omega};$$

in cui ponendo $n+1$ in vece di n, si ha

$$\Sigma x\,(x-\omega)\ldots(x-n\omega)=\frac{x\,(x-\omega)\,(x-2\omega)\ldots\{x-(n+1)\,\omega\}}{(n+2)\,\omega}+C.$$

Così fatto

$n=0$, si ha $\Sigma x=\dfrac{x\,(x-\omega)}{2\omega}+C$;

$n=1\ldots\,\Sigma x\,(x-\omega)=\dfrac{x\,(x-\omega\,(x-2\omega)}{3\omega}+C$; ecc.

Cerchiamo la somma completa della funzione $a^x\left(A+Bx+Cx^2+\text{ecc.}\right)$. Essendo

$\Sigma a^x\left(A+Bx+Cx^2+\text{ecc.}\right)=A\Sigma a^x+B\Sigma xa^x+C\Sigma x^2a^x+\text{ecc.}$, bisognerà trovare le somme Σa^x, Σxa^x, Σx^2a^x, ecc. Ora si ha (§ 3)

$\Delta a^x=a^x\left(a^\omega-1\right)$;

$\Delta xa^x=xa^x\left(a^\omega-1\right)+\omega a^\omega a^x$; ecc.

Dunque (§ 25)

$$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^\omega-1};$$

$$\Sigma xa^x=\frac{xa^x}{a^\omega-1}-\frac{\omega a^\omega\Sigma a^x}{a^\omega-1};$$

$$\Sigma x^2 a^x = \frac{x^2 a^x}{a^\omega - 1} - \frac{2\omega a^\omega}{a^\omega - 1} \Sigma x a^x - \frac{\omega^2 a^\omega}{a^\omega - 1} \Sigma a^x; \text{ ecc.}$$

E fatte le opportune sostituzioni, si avrà il cercato integrale.

Le differenze delle trascendenti circolari (§ 3) *sen* x, *cos* x ci somministrano il mezzo di averne le somme: in fatti dal § 2 noi ricaviamo

$\Delta\, sen\, x = cos\, x \cdot sen\, \omega - (1 - cos\, \omega)\, sen\, x$:

$\Delta\, cos\, x = -sen\, x \cdot sen\, \omega - (1 - cos\, \omega)\, cos\, x$; e di qui

$sen\, x = sen\, \omega \cdot \Sigma\, cos\, x - (1 - cos\, \omega) \cdot \Sigma\, sen\, x$;

$cos\, x = -sen\, \omega \cdot \Sigma\, sen\, x - (1 - cos\, \omega) \cdot \Sigma\, cos\, x$; quindi

$$\Sigma\, sen\, x = -\frac{(1 - cos\, \omega)\, sen\, x + sen\, \omega \cdot cos\, x}{2(1 - cos\, \omega)} + C;$$

$$\Sigma\, cos\, x = \frac{sen\, \omega \cdot sen\, x - (1 - cos\, \omega)\, cos\, x}{2(1 - cos\, \omega)} + C.$$

§ 28. Sia in generale z_x la funzione della quale si vuol trovare la somma Σz_x. Questa somma debbe esser una tal quantità y_x che abbiasi $y_{x+1} - y_x = z_x$; ora la serie indefinita rispetto al suo principio

$$\ldots z_{x-n\omega} + z_{x-(n-1)\omega} + \ldots + z_{x-2\omega} + z_{x-\omega}$$

può rappresentare in generale questa somma: in fatti supponiamo che in una tal serie x divenga $x + \omega$, avremo allora una seconda serie da cui sottratta la prima, ne risulterà per differenza z_x; dunque sarà generalmente

$\Sigma z_{x+\omega} = z_x + \Sigma z_x$;

$\Sigma z_{x+2\omega} = z_{x+\omega} + z_x + \Sigma z_x$;

$\Sigma z_{x+3\omega} = z_{x+2\omega} + z_{x+\omega} + z_x + \Sigma z_x$; ecc.

Quando poi ω fosse la stessa unità, ed x un numero intiero, positivo, allora si suole incominciare la serie dal termine z_0 e terminarla al termine z_{x-1}: in questa supposizione abbiamo

$$\Sigma z_x = z_{x-1} + z_{x-2} + z_{x-3} + \ldots + z_2 + z_1 + z_0;$$

così, per esempio, la somma della serie $1 + 2 + 3 \ldots + (x - 1)$ è rappresentata da Σx, che è $= \frac{x(x-1)}{2}$.

Essendo $z_x = la_x$, si ha

$$\Sigma la_x = la_{x-1} + la_{x-2} + \ldots . la_1 + la_0, \text{ quindi}$$

$$\Sigma la_x = l(a_x a_{x-1} \ldots . a_1 a_0).$$

La natura delle quistioni dà negli altri casi il principio della serie.

§ 29. Le somme o integrali finiti degli ordini superiori si ottengono ripetendo la stessa operazione dell' integrazione. L' integrale completo secondo si ottiene prendendo la somma dell' integrale completo primo, ed aggiungendovi una costante arbitraria; l' integrale completo terzo si ricava nella guisa stessa dal secondo, e così degli altri.

Se dunque rappresentiamo per y_x una data funzione di x, sarà

$\Sigma y_x + A$ l' integrale completo primo

$\Sigma^2 y_x + A\Sigma^1 1 + B$ . . . . secondo

$\Sigma^3 y_x + A\Sigma^2 1 + B\Sigma 1 + C$ . . . . . . terzo, ecc.

§ 30 Sia y_x il termine generale di una qualunque serie,

Indici $0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots . x - 1, x.$

Termini $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots . y_{x-1}, y_x.$

Se i termini della serie si sottraggono l' uno dall'altro in questa guisa $y_1 - y_0$; $y_2 - y_1$; $y_3 - y_2$; ec. $y_x - y_{x-1}$; e sì fatti residui si rappresentano con Δy_0; Δy_1; Δy_2; Δy_3; ... Δy_{x-1}. Si avrà una nuova serie di quantità, alle quali si dà il nome di *differenze prime della serie.*

Sottraendo nella stessa guisa le differenze prime l'una dall'altra, $\Delta y_1 - \Delta y_0$; $\Delta y_2 - \Delta y_1$ ecc.; si ha un' altra serie di quantità, cui si dà il nome di *differenze seconde*, e si rappresentano con $\Delta^2 y_0$; $\Delta^2 y_1$; $\Delta^2 y_2$; ecc., così delle differenze terze, quarte, ecc.

In quelle serie, nelle quali le prime o le seconde o le terze ecc. differenze sono costanti, cioè tutte tra di loro eguali, il termine generale e la somma si ottiene col mezzo degl' integrali finiti delle funzioni.

In fatti sia y_x il termine generale di una serie che abbia le differenze eguali ciascuna alla costante a, e si cerchi il valore di y_x. Questa condizione ci darà l' equazione $\Delta^3 y_x = a$, da cui $y_x = \Sigma^3 a$,

$$y_x = a\Sigma\Sigma\Sigma 1 = \frac{ax(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} + A\frac{x(x-1)}{2} + Bx + C;$$

ove A, B, C sono le costanti arbitrarie aggiunte nelle integrazioni.

Per esempio, nella serie

Indici	0,	1,	2,	3,	4, ... x
Serie	27,	64,	125,	216,	343 .... y_x
Differenze I.e ..	37,	61,	91,	127, ...	
Differenze II.e	24,	30,	36, ...		
Differenze III.e	6,	6, ...			

Le differenze terze sono costanti ed eguali a 6; dunque

$$y_x = x(x-1)(x-2) + \frac{Ax(x-1)}{2} + Bx + C;$$

Ora affinchè questo termine generale, il quale appartiene a tutte le serie che hanno le differenze terze eguali a 6, convenga particolarmente alla nostra, è necessario determinare a proposito le costanti A, B, C.

A tal fine osservo che fatto $x = 0, = 1, = 2$ debbe aversi $y_x = 27, = 64, = 126$; quindi sarà $27 = C$, $64 = B + C$; $125 = A + 2B + C$; dalle quali si ricava $B = 37$; $A = 24$; sarà dunque

$$y_x = x(x-1)(x-2) + 12 \cdot x(x-1) + 37x + 27.$$

§ 31. Dall' aver sopra (§ 28) mostrato che $\Sigma y_x = y_{x-1} + y_{x-2} + \ldots\ldots + y_1 + y_0$, dipende che rappresentando per S la somma dei termini di una serie

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{x-2} + y_{x-1} + y_x,$$

avremo sempre $S = \Sigma y_x + y_x$.

Vogliasi, per esempio, la somma dei primi cinque termini della serie con le differenze terze costanti eguali a 6;

Dalla formola $S = \Sigma y_x + y_x$ si ricava

$$S = \Sigma x(x-1)(x-2) + 12\Sigma x(x-1) + 37\Sigma x + 27\Sigma 1$$
$$+ x(x-1)(x-2) + 12x(x-1) + 37x + 27;$$

ed eseguendo le integrazioni

$$S = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4} + 12\,\frac{x(x-1)(x-2)}{3}$$
$$+ 37\,\frac{x(x-1)}{2} + 27x + A + x(x-1)(x-2)$$
$$+ 12(x-1)x + 37x + 27;$$

ove A è l' arbitraria portata dall' integrazione. Per determinarla osservo che quando abbiamo $x=0$ dobbiamo avere $S=y_0=27$, pel che si trova $A=0$.

Se ora facciamo $x=4$, avremo per la ricercata somma

$S=3\cdot2\cdot1+5\cdot4\cdot3\cdot2+61\cdot2\cdot3+64\cdot4+27=775$.

Altro esempio:

Indici 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... x

Serie 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1, ... $\cos\frac{\pi x}{2}$

indicando per $\frac{\pi}{2}$ un arco di 90°.

La somma di questa serie sarà dunque

$S=\Sigma\cos\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+C$. Ponendo ora nella formola del § 27, $\frac{\pi x}{2}$ in vece di x, e $\frac{\pi}{2}$ in vece di ω,

avremo $\Sigma\cos\frac{\pi x}{2}=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}}{2}+C$; e la somma cercata sarà $S=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}}{2}+C$;

Per determinare la costante osservo che $x=0$ debbe dare $S=1$, dunque $1=\frac{1}{2}+C$; e di qui $C=\frac{1}{2}$:

avremo per tanto $S=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+1}{2}$.

Facciamo $x=7$, per esempio, e si avrà

$$S=\frac{\operatorname{sen}\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+1}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

§ 32. Diciamo ora qualche cosa dell' uso dell' integrazione delle funzioni nella teorica delle combinazioni.

Avendo un numero qualunque x di quantità a, b, c, ecc., in quanti modi possono elleno combinarsi prendendone due a due, tre a tre, ecc.?

Sia y_x funzione dell' x il numero dei modi nei quali si possono combinare le quantità due per due. Se il numero delle quantità si accresce di una unità, sarà quel numero di modi y_{x+1}: ora questo secondo numero di combinazioni y_{x+1} debb' essere eguale al primo y_x aumentato di x; dunque $y_{x+1} = y_x + x$, e di qui $y_{x+1} - y_x = x$; $\Delta y_x = x$; $y_x = \Sigma x$; $y_x = \frac{x(x-1)}{2} + A$.

Per determinare A osservo che $x = 0$ debbe dare $y_0 = 0$, dunque $A = 0$, e però $y_x = \frac{x(x-1)}{2}$.

Se y_x rappresenta il numero delle combinazioni, prese le quantità tre a tre, allora y_{x+1} sarà eguale ad y_x più il numero delle combinazioni delle quantità due a due, quindi

$$y_{x+1} = y_x + \frac{x(x-1)}{2}; \quad \Delta y_x = \frac{x(x-1)}{2};$$

$$y_x = \Sigma \frac{x(x-1)}{2}; \quad y_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3};$$

Generalmente il numero delle combinazioni, prendendo un numero n per volta di quantità, si troverebbe essere

$$y_x = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}.$$

5

Se dato il numero x di quantità, si dimandasse la somma S di tutte le combinazioni di quelle quantità prese ad una ad una; più tutte le combinazioni prese le quantità due a due, più quelle per le quantità tre a tre; più ecc; più le combinazioni per le quantità x ad x per volta, ella si avrebbe così espressa:

$$S = x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-x+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots x};$$

che si compendia in $S = 2^x - 1$.

CAPO IV.

Integrazione delle differenze delle funzioni di più variabili.

§ 33. Al § 14 abbiamo trovato l' equazione (1), $\Delta(x+y) = \omega + \theta = (\omega + \theta)\,1$; dunque sarà

$\Sigma 1 = \dfrac{x+y}{\omega+\theta} + \phi(x\theta - y\omega)$, essendo $\phi(x\theta - y\omega)$ la funzione arbitraria, che rende completa la somma totale dell' unità.

Parimente dall' equazione (2) ricaviamo $x^2 + y = 2\omega\Sigma x + (\omega^2 + \theta)\,\Sigma 1$, ed in conseguenza

$$\Sigma x = \frac{x^2 + y - (\omega^2 + \theta)\,\Sigma 1}{2\omega} + \phi(x\theta - y\omega);$$

e questa espressione è la somma completa di x.

Cangiando nella trovata espressione x in y, ed ω in θ e *vice versa*, avremo

$$\Sigma y = \frac{y^2 + x - (\theta^2 + \omega)\,\Sigma 1}{2\theta} + \phi(x\theta - y\omega).$$

L' equazione (3) ci dà

$x^3 + y = 3\omega\Sigma x^2 + 3\omega^2\Sigma x + (\omega^3 + \theta)\Sigma 1$, e quindi

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3 + y - 3\omega^2\Sigma x - (\omega^3 + \theta)\Sigma 1}{3\omega} + \phi(x\theta - y\omega);$$

e permutando x in y, ω in θ e *vice versa*, avremo

$$\Sigma y^2 = \frac{y^3 + x - 3\theta^2\Sigma y - (\theta^3 + \omega)\Sigma 1}{3\theta} + \phi(x\theta - y\omega).$$

Così troveremmo le somme complete delle potenze superiori dell' x e dell' y.

Dall' equazione (7) abbiamo

$x^2 y = \theta\Sigma x^2 + 2\omega\Sigma xy + 2\omega\theta\Sigma x + \omega^2\Sigma y + \omega^2\theta\Sigma 1$,

da cui possiam dedurre

$$\Sigma xy = \frac{x^2 y - \theta\Sigma x^2 - 2\omega\theta\Sigma x - \omega^2\Sigma y - \omega^2\theta\Sigma 1}{2\omega} + \phi(x\theta - y\omega).$$

Dall'equazione (8) ritroveremo l' integrale di $x^2 y$; cioè il valore di $\Sigma x^2 y$, da cui avremo quello di Σxy^2; e per mezzo di tutte queste somme conosciute ricaveremo dall' equazione (9) il valore di $\Sigma x^2 y^2$; e così via via.

In questa guisa potremo sempre avere la somma completa di un prodotto $x^m y^n$, essendo m, n numeri intieri e positivi.

Per esempio, cerchiamo la somma completa di $z = 4x + 2y + 2$: supponendo $\omega = \theta = 1$, si ha $\Sigma(4x + 2y + 2) = 4\Sigma x + 2\Sigma y + 2\Sigma 1$, e fatte le debite sostituzioni.

$\Sigma z = 2x^2 + 2y - 2(x + y) + y^2 + x - (x + y) + (x + y) + \phi(x - y) = 2x^2 + y^2 - x + \phi(x - y)$,

ove $\phi(x - y)$ è l' arbitraria che porta l' integrazione.

Gl' integrali o le somme complete delle quantità trascendenti *sen x cos y*, *sen y cos x*, *cos x cos y*, *sen x sen y* ci sono date dall' equazioni trovate al § 14

esprimerne le differenze : abbiamo in fatti da esse

$$sen\,x\,cos\,y = A\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + B\Sigma\,sen\,x\,cos\,y$$
$$+ C\Sigma\,sen\,y\,cos\,x + D\Sigma\,cos\,x\,cos\,y$$

$$sen\,x\,sen\,y = A'\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + B'\Sigma\,sen\,x\,cos\,y$$
$$+ C'\Sigma sen\,y\,cos\,x + D'\Sigma\,cos\,x\,cos\,y$$

$$cos\,x\,sen\,y = A''\Sigma\,sen\,x\,sen\,y + B''\Sigma\,sen\,x\,cos\,y$$
$$+ C''\Sigma sen\,y\,cos\,x + D''\Sigma\,cos\,x\,cos\,y$$

$$cos\,x\,cos\,y = A'''\Sigma sen\,x\,sen\,y + A'''\Sigma\,sen\,y\,cos\,x$$
$$+ C'''\Sigma sen\,y\,cos\,x + D'''\Sigma\,cos\,x\,cos\,y$$

d'onde si ricavano i valori di $\Sigma\,sen x cos y$; $\Sigma\,sen\,x\,sen\,y$; $\Sigma\,cos\,x\,sen\,y$; $\Sigma\,cos\,x\,cos\,y$.

In generale discorrendo qui come al § 28, avremo la somma completa di una qualunque funzione di due variabili x, y, data da quest' equazione

$$\Sigma z_{x,y} = \phi\,(x\theta - y\omega) + z_{x-\omega,\,y-\theta} +$$
$$z_{x-2\omega,\,y-2\theta} + z_{x-3\omega,\,y-3\theta} + \ldots .$$

la quale finisce a tenore dei casi particolari cui appartiene : ordinariamente però se $\omega = 1$, $\theta = 1$, quando x è maggiore di y, si fa

$$\Sigma z_{x,y} = \phi\,(x - y) + z_{x-1,\,y-1} +$$
$$z_{x-2,\,y-2} + \ldots . + z_{x-y,\,0};$$

e quando y è maggiore di x, si fa

$$\Sigma z_{x,y} = \phi\,(x - y) + z_{x-1,\,y-1} +$$
$$z_{x-2,\,y-2} + \ldots . + z_{0,\,y-x}.$$

§ 34. Abbiamo veduto al § antecedente che

$$\Sigma y = \frac{y^2 + x - (\theta^2 + \omega)\,\Sigma 1}{2\theta} + \Psi\,(x\theta - y\omega).$$

Parimente dall' equazione (6) del § 14, avremmo ottenuto

$$\Sigma y = \frac{xy - \theta\Sigma x - \omega\theta\Sigma 1}{\omega} + \phi(x\theta - y\omega);$$ e sostituendo per Σx il suo valore

$$\Sigma y = \frac{2\omega xy - \theta x^2 - \theta y + (\theta^2 - \omega^2\theta)\Sigma 1}{2\omega^2} + \phi(x\theta - y\omega).$$

Abbiamo dunque due espressioni per Σy: ora ciò accadendo anco per le somme delle potenze superiori delle variabili, non sarà inutile trattenersi a dimostrare come queste due espressioni diverse in apparenza, sono però in sostanza la stessa, tanto più che con lo stesso metodo dimostreremmo l' eguaglianza di due qualunque altre espressioni che potessero aversi per rappresentare una medesima somma. Se le due espressioni avute per Σy sono in sostanza la stessa, l' equazione

$$\frac{2\omega xy - \theta x^2 - \theta y + (\theta^2 - \omega^2\theta)\Sigma 1}{2\omega^2} + \phi(x\theta - y\omega) = \frac{y^2 + x - (\theta^2 + \omega)\Sigma 1}{2\theta} + \Psi(x\theta - y\omega)$$ debb' esser vera, e per ciò nell' equazione

$$\frac{\omega^2 y^2 + \omega^2 x - 2\omega\theta xy + \theta^2 x^2 + \theta^2 y - (\omega^3 + \theta^3)\dfrac{x+y}{\omega+\theta}}{2\theta\omega^2} = \Psi(x\theta - y\omega) - \phi(x\theta - y\omega)$$ il primo membro debb' essere una funzione di $x\theta - y\omega$: dunque questo primo membro o debbe divenire zero o eguale ad una quantità costante facendo $x\theta - y\omega = 0$, ovvero $x = \frac{y\omega}{\theta}$: fatta questa sostituzione, il primo membro diviene effettivamente nullo: egli è dunque una funzione di $x\theta - y\omega$: dunque i due valori di Σy sono tali che l' uno si riduce facilmente all' altro, cambiando la forma della funzione arbitraria.

Niuno prima di me aveva date queste dottrine.

§ 35. Sia $u_{x,y}$ o semplicemente u la differenza seconda $\Delta^2 \underbrace{z}_{xy}$, essendo z una funzione di x, y, e si avrà $u = \Delta^2 \underbrace{z}_{xy}$.

La funzione z (la quale differenziata due volte prima rispetto all' x, poi all' y, dà la funzione u) chiamasi la *somma seconda* o l' *integrale secondo* di z *parziale*, preso cioè prima rispetto all' x, poi rispetto all' y, e s' indica così:

$z = \Sigma^2 \underbrace{u}_{xy}$: di modo che l' equazione

$u = \Delta^2 \underbrace{z}_{xy}$, ci dà subito l' altra

$z = \Sigma^2 \underbrace{u}_{xy}$; ed in generale l' equazione

$u = \Delta^{m+n} \underbrace{z}_{x^m y^n}$ dà l' equazione

$z = \Sigma^{m+n} \underbrace{u}_{x^m y^n}$; e queste due equazioni significano in sostanza la stessa cosa.

Nel passare dalle differenze agl' integrali, ogni volta che si fa un' integrazione conviene aggiungere una costante arbitraria, acciocchè ad operazione finita, si trovino nel risultamento dell' integrazioni tante costanti arbitrarie, quante unità contiene l' ordine dell' integrale; allora un integrale di un ordine $n + m$ conterrà un numero $m + n$ di costanti arbitrarie, e riceve in tal caso il nome d' *integrale* completo.

Quelle costanti potranno anche essere funzioni di una variabile, imperocchè quando si faranno le integrazioni in riguardo all' x, potranno essere funzioni dell' y; e quando integreremo in riguardo all' y, le arbitrarie potranno essere funzioni dell'x.

Ciò premesso dalle differenziali del § 19 ricaveremo dunque

$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{1}} = \frac{xy}{\omega\theta} + \phi(x) + \Psi(y)$, essendo $\phi(x)$, $\Psi(y)$ due funzioni arbitrarie rispettivamente dell' x e dell' y.

$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x}} = \frac{x^2 y}{2\omega\theta} - \frac{\omega}{2}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{1}} + \phi(x) + \Psi(y)$, e mutando x in y, ω in θ e *vice versa* avremo

$$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{y}} = \frac{y^2 x}{2\omega\theta} - \frac{\theta}{2}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{1}} + \phi(x) + \Psi(y).$$

$$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x^2}} = \frac{x^3 y}{3\omega\theta} - \omega\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x}} - \frac{\omega^2}{3}\Sigma \underset{xy}{\underbrace{1}} + \phi + \Psi. \text{ ec.}$$

$$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{xy}} = \frac{x^2 y^2}{4\omega\theta} - \frac{\omega}{2}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{y}} - \frac{\theta}{2}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x}} - \frac{\omega\theta}{4}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{1}} + \phi(x) + \Psi(y).$$

$$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x^2 y}} = \frac{x^3 y^2}{6\omega\theta} - \omega\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{xy}} - \frac{\omega^2}{3}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{y}} - \frac{\theta}{2}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x^2}} - \frac{\omega\theta}{2}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{x}} - \frac{\omega^2\theta}{6}\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{1}} + \phi(x) + \Psi(y). \text{ ec.}$$

La somma seconda di un prodotto qualunque $x^m y^n$ non sarebbe difficile ad ottenersi, battendo la stessa via: anzi in generale dalla formula (7) del § 19 abbiamo (indicando con p_x una funzione dell' y)

$\Sigma^2 \underset{xy}{\underbrace{p_x \cdot q_y}} = \Sigma p_x \cdot \Sigma q_y + \phi(x) + \Psi(y)$, e da questa

possono ricavarsi più facilmente le somme qui sopra trovate.

§ 36. La formula generale dell' integrale o *somma seconda* di una qualunque funzione $z_{x,y}$ dell' x e dell' y può anco rappresentarsi con una serie ; in fatti $\Sigma^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}}$ è eguale alla somma in riguardo all' y della somma di $z_{x,y}$ in riguardo all' x : ora la somma di $z_{x,y}$ in riguardo all' x è

$$z_{x-\omega,y} + z_{x-2\omega,y} + z_{x-3\omega,y} + z_{x-4\omega,y} + \text{ecc.}$$

dunque

$$\Sigma^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = \Sigma z_{\underbrace{x-\omega,y}_{y}} + \Sigma z_{\underbrace{x-2\omega,y}_{y}} + \Sigma z_{\underbrace{x-3\omega,y}_{y}} + \text{ec.},$$

$$\begin{aligned}\Sigma^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = {} & z_{x-\omega,y-\theta} + z_{x-2\omega,y-\theta} + z_{x-3\omega,y-\theta} + \text{ec.} \\ & + z_{x-\omega,y-2\theta} + z_{x-2\omega,y-2\theta} + z_{x-3\omega,y-2\theta} + \text{ec.} \\ & + z_{x-\omega,y-3\theta} + z_{x-2\omega,y-3\theta} + z_{x-3\omega,y-3\theta} + \text{ec.} \\ & + \text{ecc.} \quad + \text{ecc.} \quad + \text{ecc.}\end{aligned}$$

Questa formula in generale è composta di un numero infinito di termini : nei diversi casi però a norma delle circostanze del problema, ne è assegnato il fine.

Se si fa $\omega = 1$, $\theta = 1$, e le variabili x, y suppongonsi numeri intieri, la serie suole finire ai termini ove o tutte e due, o una delle variabili diviene nulla. Così, incominciando dagli ultimi termini a scrivere la serie, abbiamo

$$\Sigma^2 z_{\underbrace{x,y}_{xy}} = z_{0,0} + z_{1,0} + z_{2,0} + z_{3,0} + \ldots + z_{x-1,0}$$

$$+ z_{0,1} + z_{1,1} + z_{2,1} + z_{3,1} + \ldots + z_{x-1,1}$$

$$+ z_{0,2} + z_{1,2} + z_{2,2} + z_{3,2} + \ldots + z_{x-1,3}$$

$$+ z_{0,3} + z_{1,3} + z_{2,3} + z_{3,3} + \ldots + z_{x-1,3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ z_{0,y-1} + z_{1,y-1} + z_{2,y-1} + \ldots + z_{x-1,y-1}$$

§ 37, Facciamo qualche applicazione alla dottrina delle serie doppie (*).

Sia la serie doppia, conosciuta sotto il nome di Tavola Pittagorica,

	0	1	2	3	4	5 x
0	0	0	0	0	0	0 0
1	0	1	2	3	4	5 x
2	0	2	4	6	8	10 . . . . . $2x$
3	0	3	6	9	12	15 . . . . . $3x$
4	0	4	8	12	16	20 . . . . . $4x$
:	.	.	.	.	.	. . . . . .
y	0	y	$2y$	$3y$	$4y$	$5y$ . . . . . xy

della quale cerchisi la somma. Rappresentiamo con S la somma di tutt' i termini fino agl' indici $x-1$,

(*) Si chiamano serie doppie quelle che hanno il termine generale funzione di due variabili.

$y-1$; avremo a tenore di ciò che si è veduto al § 35

$$S=\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy}.$$

Ora (§ 36) facendo $\omega=\theta=1$, abbiamo

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2y^2}{4} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \underbrace{y}_{xy} - \frac{1}{2}\Sigma^2 \underbrace{x}_{xy}$$

$$-\underbrace{\frac{1}{4}}\,\Sigma^2 \underbrace{1}_{xy} + \phi(x) + \Psi(y),$$

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2y^2}{4} - \frac{xy^2}{4} + \frac{xy}{4} - \frac{x^2y}{4} + \frac{xy}{4}$$

$$-\frac{xy}{4} + \phi(x) + \Psi(y),$$

$$\Sigma^2 \underbrace{xy}_{xy} = \frac{x^2y^2 - xy^2 - yx^2 + xy}{4} + \phi(x) + \Psi(y)$$

$$= \frac{x(x-1)}{2}.\frac{y(y-1)}{2} + \phi(x) + \Psi(y);$$

dunque

$$S = \frac{x(x-1)y(y-1)}{2 \cdot 2} + \phi(x) + \Psi(y).$$

Avremmo trovato subito questo risultamento col mezzo della formola

$\Sigma^2 \underbrace{p_x \cdot q_y}_{xy} = \Sigma p_x \cdot \Sigma q_y + \phi(x) + \Psi(y)$, facendovi

$p_x = x$, $q_y = y$.

Siccome quando x ed y sono nulle, la somma S debb' essere ancora essa nulla, avremo perciò $\phi(x)=0$, $\Psi(y)=0$, e perciò

$$S = \frac{x(x-1)y(y-1)}{4}.$$

Facciasi, per esempio, $x=5$, $y=4$, e troveremo

$$S=\frac{5\cdot4\cdot4\cdot3}{4}=60.$$

La somma adunque di tutt' i termini della serie fino all' indice 4 orizzontale, e all' indice 3 verticale, è $=60$, come può verificarsi.

Per un altro esempio abbiasi la serie doppia

0	0	1	2	3	4 x
1	1	2	3	4	5 . . . . . . $x+1$
2	2	3	4	5	6 . . . . . . $x+2$
3	3	4	5	6	7 . . . . . . $x+3$
4	4	5	6	7	8 . . . . . . $x+4$
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
x	y,	$y+1$,	$y+2$,	. . .	. . . . . $y+x$

della quale si cerca la somma. Rappresentiamo con S la somma di tutt' i di lei termini, fino agl' indici $x-1$, $y-1$, ed avremo

$$S=\Sigma^2\frac{(x+y)}{xy}=\Sigma^2\frac{x}{xy}+\Sigma^2\frac{y}{xy}$$

$$=\frac{x^2y+y^2x-2xy}{2}+\phi(x)+\Psi(y).$$

A determinare le due funzioni osservo che facendo $x=1$, dobbiamo avere

$S=\frac{y(y-1)}{2}$, e da questa condizione si ricava

$\frac{y(y-1)}{2}=\frac{y+y^2-2y}{2}+\phi(1)+\Psi(y)$ che ci dà

$\Psi(y)=-\phi(1)$. Nel modo stesso, facendosi $y=1$,

dobbiamo avere

$S = \frac{x(x-1)}{2}$, e quindi $\frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2 + x - 2x}{2}$ $+ \varphi(x) + \Psi(1)$, e quindi $\varphi(x) + \Psi(1) = 0$.

Le due funzioni adunque $\varphi(x)$, $\Psi(y)$ sono costanti; queste si annullano, poichè la somma cercata debb' essere $= 0$ quando $x = y = 0$. Avremo pertanto

$S = \frac{x^2 y + y x^2 - 2xy}{2}$. Se $x = 5$, $y = 4$, sarà $S = 70$

CAPO V.

Integrazione dell' equazioni lineari colle differenze finite del primo e del secondo ordine.

§ 38. Nel trattare dell' integrazione dell' equazioni principierò dal supporre che l' aumento ω della x sia l' unità, e che l' equazioni siano *lineari*, cioè a dire, che in esse le differenze finite Δy_x, $\Delta^2 y_x$, ecc., ovvero le funzioni y_x, y_{x+1}, ecc. siano innalzate soltanto alla prima potenza.

Si suole dai Geometri dar il nome d' *integrale completo* di una equazione colle differenze finite dell' ordine n, di un' equazione, cioè, la quale contiene $\Delta^n y_x$, ovvero y_{x+n}, ad un valore dell'y_x fornito di un numero n di costanti arbitrarie, il quale sostituito nell' equazione medesima la renda identica: ovvero ad un' equazione medesima tra x, y_x ed un numero n di costanti arbitrarie, dalla quale eliminando queste costanti, come si è insegnato al § 12, nasca quell' equazione colle differenze finite.

Queste due qualità dell' integrale completo sono in sostanza tutte una.

Mancando poi tutte o alcune di quelle costanti, l' integrale suol dirsi *particolare*.

§ 39. Debbasi integrare l' equazione del primo ordine $y_{x+1} - a_x y_x - X$. Incominciamo dal supporre $X = 0$, onde abbiasi $y_{x+1} - a_x y_x = 0$; rappresenti poi a_x una funzione conosciuta dell' x.

La proposta equazione ci dà $y_{x+1} = a_x y_x$ e prendendone i logaritmi, si ottiene

$ly_{x+1} = ly_x + la_x$, ovvero

$ly_{x+1} - ly_x = la_x$, e perciò

$\Delta ly_x = la_x$.

Quest' ultima equazione dà subito quest' altra.

$ly_x = \Sigma la_x$, da cui $y_x = e^{\Sigma la_x}$, (volendo che e significhi il numero il cui logaritmo iperbolico è l' unità). Ora $\Sigma la_x = \Sigma la_x + C$, rappresentando con C una costante arbitraria; dunque sarà

$y_x = e^{\Sigma la_x + c} = e^C \cdot e^{\Sigma la_x}$: ma essendo C arbitraria, è ancora e^C una quantità arbitraria; dunque ponendo in vece di e^C un' altra costante arbitraria A, avremo

$y_x = Ae^{\Sigma la_x}$; e questo sarà l'integrale completo (38) della proposta.

Nel capo terzo abbiamo insegnato a trovare il valore di Σla_x, il quale in generale è

$$\Sigma la_x = la_{x-1} + la_{x-2} + \ldots + la_1 + la_0$$
$$= l(a_{x-1} \cdot a_{x-2} \cdot a_1 \cdot a_0);$$ abbiamo adunque l' integrale completo espresso così:

$$y_x = Ae^{l(a_{x-1} \cdot a_{x-2} \ldots a_1 \cdot a_0)} =$$
$$Aa_{x-1} \cdot a_{x-2} \ldots a_1 \cdot a_0.$$

§ 40. Sia X una funzione conosciuta dell' x, e sia $y_{x+1} - a_x y_x = X$ l' equazione da integrarsi.

Facciamo $y_x = a_x \Sigma z_x$, essendo a_x, z_x due funzioni incognite dell' x da determinarsi. Sarà (§ 28) $y_{x+1} = a_{x+1} \Sigma z_{x+1} = a_{x+1} (z_x + \Sigma z_x)$, e sostituendo nella proposta all' y_x ed all' y_{x+1}, i loro valori, troveremo fra a_x e z_x questa equazione

$$(a_{x+1} - a_x a_x) \Sigma z_x + a_{x+1} \cdot z_x = X.$$

Determiniamo a_x in maniera che il coefficiente di Σz_x divenga nullo, e si avrà $a_{x+1} - a_x a_x = 0$, e quindi $a_{x+1} z_x = X$. Dalla prima di queste due equazioni si ricava $a_x = Ae^{\Sigma la_x}$, e dalla seconda $z_x = \frac{X}{a_{x+1}}$, e sostituendo ad a_{x+1} il suo valore, si ha

$z_x = \frac{1}{A} e^{-\Sigma la_{x+1}} . X$; sarà dunque

$y_x = a_x \Sigma z_x = e^{\Sigma la_x} \Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}} . X$; ma

$\Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}} . X = \Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}} . X + C$; dunque

$y_x = e^{\Sigma la_x} \left(C + \Sigma e^{-\Sigma la_{x+1}} . X \right)$: questa espressione è l' integrale completo della proposta.

Essendo poi (§ 18) $\Sigma la_{x+1} = la_x + \Sigma la_x$, avremo

$$e^{-\Sigma la_{x+1}} = e^{-la_x - \Sigma la_x} = e^{-\Sigma la_x} . \frac{1}{e^{la_x}} = e^{-\Sigma la_x} . \frac{1}{a_x};$$

e quindi $y_x = e^{\Sigma la_x} \left(C + \Sigma e^{-\Sigma la_x} . \frac{X}{a_x} \right)$.

Supponiamo che l' equazione sia $y_{x+1} - a y_x = b$; che a, b siano costanti: avremo

$$y_x = a^{x-1} \left(C + \Sigma e \frac{1}{a^x} \right) = a^{x-1} \left(C + b \cdot \frac{1}{a^x} \cdot \frac{a}{1-a} \right)$$

$$= C a^{x-1} + \frac{b}{1-a} = C' a^x + \frac{b}{1-a}, \text{facendo } C' = \frac{C}{a}.$$

§ 41. Siccome X è una funzione qualunque data di x, rappresentiamola con m_x, e quando le funzioni che entrano nell' integrale completo, non saranno integrabili, prenderemo, per rappresentare lo stesso integrale completo, la seguente espressione sbarazzata dai segni sommatorj:

$$y_x = a_0 \cdot a_1 \ldots a_{x-1} \cdot \left(C + \Sigma \frac{m_x}{a_x \cdot a_{x-1} \ldots a_1 \cdot a_0}\right);$$

ovvero togliendo l' altro segno sommatorio che è fra le parentesi,

$$y_x = a_{x-1} \cdot a_{x-2} \cdot a_{x-3} \cdot \ldots \ldots a_1 \cdot a_0 \Big(C$$

$$+ \frac{m_{x-1}}{a_{x-1} \cdot a_{x-2} \ldots a_1 \cdot a_0} + \frac{m_{x-2}}{a_{x-2} \ldots a_1 \cdot a_0} + \ldots$$

$$+ \frac{m_1}{a_1 \cdot a_0} + \frac{m_0}{a_0} \Big),$$ ed anche

$$\begin{aligned} y_x = {} & m_{x-1} \\ & + a_{x-1} m_{x-2} \\ & + a_{x-1} a_{x-2} m_{x-3} \\ & + a_{x-1} a_{x-2} a_{x-3} m_{x-4} \\ & + a_{x-1} a_{x-2} a_{x-3} a_{x-4} m_{x-5} \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + a_{x-1} a_{x-2} a_{x-3} \ldots \ldots \ldots a_1 m_0 \\ & + a_{x-1} a_{x-2} a_{x-3} \ldots \ldots \ldots a_1 a_0 C. \end{aligned}$$

Se a_0, m_0 fossero zero, cioè se le funzioni m_x, a_x diventassero nulle quando $x = 0$; allora l' espressioni finirebbero con m_1 ed a_1; e se queste ultime fossero anche nulle, terminerebbero le espressioni medesime con m_2, a_2, e così via via.

§ 42. Per esempio, vogliasi il termine generale della serie

Indici	0	1	2	3	4	5	6 x
Serie	1,	3,	16,	137,	....		y_x

ove un termine qualunque è eguale al termine antecedente moltiplicato per 2 elevato ad una potenza indicata dall' indice del termine che si cerca, più il quadrato di questo stesso indice. Sia y_x il termine cercato, sarà y_{x-1}, il suo antecedente, ed a tenore di questa legge avremo $y_x = 2^x y_{x-1} + x^2$; in cui fatto $x+1$ in vece di x, sarà

$y_{x+1} = 2^{x+1} y + (x+1)^2$, equazione colle differenze finite del primo ordine.

Paragonando questa equazione con quella del § 40, avremo

$a_x = 2^{x+1}$, $X = (x+1)^2$, e quindi

$$y_x = e^{\Sigma l2^{x+1}} \left\{ C + \Sigma e^{-\Sigma l2^{x+2}} \cdot (x+1)^2 \right\} : \text{ora}$$

$$e^{\Sigma l2^{x+1}} = e^{\Sigma (x+1) l2} = e^{\frac{(x+1)x}{2} l2}$$

$$= e^{l2 \frac{x(x+1)}{2}} = 2^{\frac{x(x+1)}{2}} \text{; dunque}$$

$$y_x = 2^{\frac{x(x+1)}{2}} \cdot \left\{ C + \Sigma \frac{(x+1)^2}{2^{\frac{(x+1)(x+2)}{2}}} \right\} \text{; e senza}$$

segni sommatorj

$$y_x = 2^{\frac{x(x+1)}{2}} \left\{ C + \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{3^2}{2^{2.3}} + \ldots + \frac{x^2}{2^{\frac{x(x+1)}{2}}} \right\}.$$

Per determinare la costante, osservo che $x=0$ ci debbe dare $y_0=1$, e perciò $1=2^0\cdot C$, da cui $C=1$; quindi il termine generale cercato sarà

$$y_x=2^{\frac{x(x+1)}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^3}+\frac{3^2}{2^{2.3}}+\ldots+\frac{x^2}{2^{\frac{x(x+1)}{2}}}\right\}.$$

Fatto $x=3$, si ha

$$y_3=2^6\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^3}+\frac{3^2}{2^6}\right)=64+32+32+9$$

$=137$, come è appunto nella serie.

§ 43. Abbiasi l' equazione del secondo ordine $y_{x+2}-b_x y_{x+1}-a_x y_x=0$, nella quale a_x, b_x siano due funzioni cognite dell' x.

Pongo $y_x=Ae^{\Sigma l m_x}$, essendo A una costante indeterminata, ed m_x una funzione di x incognita, ed ho

$$y_{x+1}=Ae^{\Sigma l m_{x+1}}=Ae^{\Sigma l m_x}\cdot e^{l m_x},$$

$y_{x+2}=Ae^{\Sigma l m_x}\cdot e^{l m_x+l m_{x+1}}$; sostituisco nella proposta, e dividendo tutti i suoi termini per $Ae^{\Sigma l m_x}$, ottengo

$e^{l m_x+l m_{x+1}}-b_x e^{l m_x}-a_x=0$, ovvero

$m_x m_{x+1}-b_x m_x-a_x=0$. Quest' equazione è una equazione del primo ordine, ma non lineare, alla

quale si soddisfà prendendo in vece di m_x questa funzione inesplicabile, che ha la forma di una frazione continua:

$$m_x = b_{x-1} + \cfrac{a_{x-1}}{b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3} + \cfrac{a_{x-3}}{\ddots + b_1 + \cfrac{1}{C}}}}$$

C essendo la costante arbitraria.

L' integrale adunque della proposta equazione sarà $y_x = Ae^{\Sigma lm_x}$, ponendovi però in vece di m_x la ritrovata espressione; e sarà completo, poichè contiene due costanti A, C arbitrarie.

Essendo $e^{\Sigma lm_x} = m_{x-1} \cdot m_{x-2} \cdot m_{x-3} \ldots m_1 \cdot m_0$

è per sè manifesto che il cercato integrale sarà anche dato da questa espressione sviluppata

$$y_x = A\left(b_{x-2} + \cfrac{a_{x-2}}{b_{x-3} + \cfrac{a_{x-3}}{\ddots\, b_1 + \cfrac{a_1}{C}}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots \left(b_2 + \cfrac{a_2}{b_1 + \cfrac{a_1}{C}}\right)\left(b_1 + \frac{a_1}{C}\right).$$

Non abbiamo considerato m_0, poichè essa è quantità costante, e può essere contenuta in A.

§ 44. Se i coefficienti dell' equazione sono costanti, e s' indicano con a, b, onde sia $y_{x+2} - by_{x+1} - ay_x = 0$, l' integrale allora sarà

$$y_x = A\left(\overset{x-2}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{\ddots\; b+\cfrac{a}{C}}}}}\right)\left(\overset{x-3}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{\ddots\; b+\cfrac{a}{C}}}}\right)\cdots\cdots\left(\overset{2}{b+\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{C}}}\right)\left(\overset{1}{b+\cfrac{a}{C}}\right).$$

I numeri $x-2$, $x-3$, ... 2, 1 che si trovano al di sopra quei fattori, c' indicano quante divisioni sono nella sottoposta frazione continua.

§ 45. Se della equazione $y_{x+2} - b_x y_{x+1} - a_x y_x = 0$ potremo avere in qualche maniera due integrali particolari, forniti ciascuno di una costante arbitraria, ne avremo allora l' integrale completo, prendendo la somma dei due integrali medesimi.

Supponiamo che soddisfaccia alla proposta $y_x = \alpha_x$ ed $y_x = \alpha'_x$ essendo α_x, α'_x due funzioni determinate dell' x contenenti ciascuna una costante arbitraria, e l' integrale completo sarà $y_x = \alpha_x + \alpha'_x$. In fatti essendo identiche le due equazioni

$a_{x+2} - b_x a_{x+1} - a_x a_x = 0$,

$a'_{x+2} - b_x a'_{x+1} - a_x a'_x = 0$, lo sarà anche la loro somma.

$a_{x+2} + a'_{x+2} - b_x (a_{x+1} + a'_{x+1}) - a_x (a_x + a'_x) = 0$ sarà, cioè, soddisfatta l'equazione proposta quando vi si fa $y_x = a_x + a'_x$. Ciò avviene perchè l' equazione da integrarsi è lineare.

Se poi le funzioni a_x, a'_x soddisfacessero alla proposta, e non contenessero costanti, allora moltiplicando ciascuna di esse per una costante arbitraria, e sommandole, si avrebbe l' integrale completo $y_x = Aa_x + Ba'_x$.

Rispetto all' equazione con i coefficienti costanti è facile a capire che se per a, a' prendonsi le radici dell'equazione $a^2 - ba - a = 0$, soddisfà all' equazione.

$y_{x+2} - by_{x+1} - ay_x = 0$, tanto $y_x = a^x$ quanto $y_x = a'^x$, ed il di lei integrale completo è

$y_x = Aa^x + Ba'^x$.

§ 46. Per fare un esempio, vogliasi il termine generale di questa serie

Indici	0,	1,	2,	3,	4,	5, ... x
Serie	1,	2,	8,	42,	296,	.... y_x

nella quale un termine qualunque y_x è eguale ai due termini che lo precedono y_{x-1}, y_{x-2} moltiplicato il primo per l' indice x, ed il secondo pel quadrato dello stesso indice. Questa legge è contenuta nell' equazione

$y_x = xy_{x-1} + x^2 y_{x-2}$, ch' è del secondo ordine colle differenze finite; e dall' integrazione di questa dipende il termine generale di quella serie.

Poniamo in quell' equazione $x + 2$ in vece dell' x, ed avremo l' equazione

$y_{x+2} = (x+2)\,y_{x+1} + (x+2)^2 y_x$, che, paragonata con l' equazione generale qui sopra integrata, ci dà $b_x = x + 2$, $a_x = (x+2)^2$. Se si fa $x = 3$, avremo

$$y_3 = A\left(3 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{1^2}{C}}}\right)\left(2 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{1^2}{C}}\right)\left(1 + \frac{1^2}{C}\right):$$

le due costanti A, C si determinano osservando che $x = 0$ ci dà $y_x = 1$; ed $x = 1$ ci dà $y_x = 2$. Abbiamo allora $1 = A$, ed $A\left(1 + \frac{1^2}{C}\right) = 2$; dunque $A = 1$,

$$C = 1,\ \text{ed}\ y_3 = \left(3 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{4}{2}}\right)\left(2 + \frac{4}{2}\right)\left(1 + 1\right) = 42.$$

§ 47. Sia ora l' equazione del secondo ordine da integrarsi $y_{x+2} - b_x y_{x+1} - a_x y_x = X$ ove X è una funzione conosciuta dell' x. Supponiamo, come al § 40, $y_x = a_x \Sigma z_x$, essendo a_x, z_x due funzioni di x da determinarsi, ed avremo

$y_{x+1} = a_{x+1}(z_x + \Sigma z_x)$;

$y_{x+2} = a_{x+2}(z_{x+1} + z_x + \Sigma z_x)$. Facendo le opportune sostituzioni nella proposta, troveremo fra le due funzioni indeterminate questa equazione

$$(a_{x+2}-b_x a_{x+1}-a_x a_x)\Sigma z_x +$$
$$(a_{x+2}-b_x a_{x+1})z_x + a_{x+2}\, z_{x+1}=X.$$

Facciamo

(1)... $a_{x+2}-b_x a_{x+1}-a_x a_x=0$; e si avrà in conseguenza

(2)... $(a_{x+2}-b_x a_{x+1})z_x + a_{x+2} z_{x+1}=X.$

Dunque l' integrazione dell' equazione del secondo ordine $y_{x+2}-b_x y_{x+1}-a_x y_x=X$ dipende dall' integrazione di essa medesima quando il secondo membro è nullo, e dall' integrazione di una equazione del primo ordine.

Ora l' equazione (1) integrata, (§ 43) ci dà $a_x=Ae^{\Sigma lm_x}$, e l' altra equazione (2) si riduce a questa

$$z_{x+1}-\frac{(b_x a_{x+1}-a_{x+2})}{a_{x+2}}z_x=\frac{X}{a_{x+2}},$$ la quale, facendo il coefficiente di z_x eguale ad a'_x, ed $\frac{X}{a_{x+2}}=X'$, prende la forma $z_{x+1}-a'_x z_x=X'$, il cui integrale è (§ 40)

$$z_x=e^{\Sigma la'_x}\left(C+\Sigma e^{-\Sigma la'_x}.\frac{X'}{a'_x}\right);$$

dunque avremo il cercato integrale così espresso:

$$y_x=Ae^{\Sigma lm_x}\Sigma e^{\Sigma la'_x}\left(C+\Sigma e^{-\Sigma la'_x}.\frac{X'}{a'_x}\right);$$

Questo sarà completo perchè contiene due costanti arbitrarie A, C. Il valore di m_x è quello trovato al § 43.

CAPO VI.

Integrazione dell' equazioni lineari colle differenze finite degli ordini superiori.

§ 48. Non si sanno integrare l' equazioni degli ordini superiori se non in certi casi particolari, ma si hanno alcuni teoremi importanti in questa dottrina, che io mi accingo a dimostrare. E per non perdermi in superflua generalità, io prenderò una equazione del terzo ordine, dal maneggio della quale si ricaverà come dovremò regolarci per gli ordini più alti, onde dimostrare per essi quelle proprietà che avrem rinvenute per l' equazione del terzo.

Sia dunque l' equazione

$$(A) \ldots . a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + e y_{x+3} = X$$

nella quale a, b, c, e, X sono funzioni cognite di x. Facciamo $y_x = \alpha_x \Sigma z_x$ essendo α_x, z_x due funzioni di x da determinarsi, allora avremo (§ 48)

$$y_{x+1} = \alpha_{x+1}(z_x + \Sigma z_x),$$

$$y_{x+2} = \alpha_{x+2}(z_{x+1} + z_x + \Sigma z_x),$$

$$y_{x+3} = \alpha_{x+3}(z_{x+2} + z_{x+1} + z_x + \Sigma z_x);$$

e fattene le sostituzioni in (A), essa diverrà

$$\left.\begin{array}{l} (a\alpha_x + b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + e\alpha_{x+3})\Sigma z_x \\ \quad + (b\alpha_{x+1} + c\alpha_{x+2} + e\alpha_{x+3}) z_x \\ \qquad + (c\alpha_{x+2} + e\alpha_{x+3}) z_{x+1} \\ \qquad\quad + e\alpha_{x+3} \cdot z_{x+2} \end{array}\right\} = X.$$

Avendosi una sola equazione tra le due indeterminate a_x, z_x, una di esse potrà determinarsi a nostro piacere. Determiniamola in modo che il coefficiente di Σz_x sia nullo, e si avrà a_x dato da quest' equazione

(1) . . . $aa_x + ba_{x+1} + ca_{x+2} + ea_{x+3} = 0$;

sarà poi z_x dato da un' equazione di questa forma

(B) . . . $b'z_x + c'z_{x+1} + e'z_{x+2} = X$, nella quale

$b' = ba_{x+1} + ca_{x+2} + ea_{x+3}$;

$c' = ca_{x+2} + ea_{x+3}$;

$e' = ea_{x+3}$;

l' equazione (1) è la stessa proposta nella quale si è fatto $X = 0$; e l' equazione (B) è colle differenze finite lineari del secondo ordine; è, cioè, di un ordine inferiore di un' unità della proposta, la quale è del terzo.

§ 49. Per integrare l' equazione (B) faccio $z_x = a'_x \Sigma z'_x$ essendo a'_x, z'_x altre due funzioni di x da determinarsi; fatte le opportune sostituzioni nella stessa equazione (B), si avrà

$$\left.\begin{array}{l} \left(b'a'_x + c'a'_{x+1} + e'a'_{x+2}\right)\Sigma z'_x \\ \quad + \left(c'a'_{x+1} + e'a'_{x+2}\right) z'_x \\ \qquad + e'a'_{x+2} \cdot z'_{x+1} \end{array}\right\} = X;$$

la quale si decompone in queste due

(2) . . . . $b'a'_x + c'a'_{x+1} + e'a'_{x+2} = 0$

(C) . . . . $c''z'_x + e''z'_{x+1} = X$; essendo

$c'' = c'a'_{x+1} + e'a'_{x+2}$;

$e'' = e'a'_{x+2} = ea_{x+3} \cdot a'_{x+2}$,

così l'integrale della proposta (A) dipende dall'integrazione dell' equazioni (1), (2) e dell' equazione (C), che è del primo ordine, cioè inferiore di due unità dell'ordine della proposta.

Trovati i valori di a_x, a'_x, z'_x sarà,

$$y_x = a_x \Sigma a'_x \Sigma z'_x.$$

Per avere il valore di z'_x facciasi $z'_x = a''_x \Sigma z''_x$, e fatte le sostituzioni nell' equazione (C) avremo

$$\left.\begin{array}{l} \left(c''a''_x + e''a''_{x+1}\right)\Sigma z''_x \\ \quad + e''a''_{x+1} \cdot z''_x \end{array}\right\} = X;$$

che si decompone in queste due

$$(3) \ldots\ldots c''a''_x + e''a''_{x+1} = 0;$$

$$(D) \ldots\ldots e''a''_{x+1} \cdot z''_x = X.$$

L' integrale dell' equazione (3) ci darà il valore di a''_x, e l' equazione (D) ci darà quello di z''_x.

Avremo pertanto $y_x = a_x \Sigma a'_x \Sigma a''_x \Sigma z''_x$; e sarà questo l' integrale completo della proposta; perchè conterrà tre costanti arbitrarie, le quali vi saranno introdotte dai tre segni sommatori.

§ 50. Dall' equazione (D) si ricava

$$z''_x = \frac{X}{c'' \cdot a''_{x+1}}; \text{ ma } e'' = e'a'_{x+2}, \text{ ed } e' = ea_{x+3}$$

dunque $z''_x = \dfrac{X}{ea_{x+3} \cdot a'_{x+2} \cdot a''_{x+1}}$: sarà pertanto

$$y_x = a_x \Sigma a'_x \Sigma a''_x \Sigma \frac{X}{ea_{x+3} \cdot a'_{x+2} \cdot a''_{x+1}},$$

essendo a_x, a'_x, a''_x date dall' integrazione di queste tre equazioni

$$(1) \ldots\ a a_x + b a_{x+1} + c a_{x+2} + e a_{x+3} = 0;$$

$$(2) \ldots\ b' a'_x + c' a'_{x+1} + e' a'_{x+2} = 0;$$

$$(3) \ldots\ c'' a''_x + e'' a''_{x+1} = 0;$$

integrata però la prima di queste tre equazioni, o ritrovati tre integrali particolari di essa, si hanno subito gl' integrali delle altre due senza alcun' altra integrazione d' equazioni. In fatti se all' equazione (2), dopo avervi sostituiti i valori dei di lei coefficienti, aggiungesi l' equazione (1) moltiplicata per $\Sigma a'_x$, avremo l' equazione

$$(2)' \ldots \left.\begin{aligned} &(a a_x + b a_{x+1} + c a_{x+2} + e a_{x+3}) \Sigma a'_x \\ &+ (b a_{x+1} + c a_{x+2} + e a_{x+3})\, a'_x \\ &+ (c a_{x+2} + e a_{x+3})\, a'_{x+1} \\ &+ e a_{x+3} \cdot a'_{x+2} \end{aligned}\right\} = 0$$

la quale si riduce a quest' altra

$$(2)' \ldots\ a a_x \Sigma a'_x + b a_{x+1} \Sigma a'_{x+1} + c a_{x+2} \Sigma a'_{x+2} + e a_{x+3} \Sigma a'_{x+3} = 0.$$

Ora questa equazione (2)' avendo i medesimi coefficienti della (1), è chiaro che $a_x \Sigma a'_x$ debbe soddisfare ad essa, e che quindi debb' essere un di lei integrale particolare; e se noi lo indichiamo per $a1_x$, avremo $a_x \Sigma a'_x = a1_x$; e quindi $a'_x = \Delta \left(a1_x : a_x\right)$: dunque un integrale particolare dell' equazione (2) è la differenza finita del quoziente di tre integrali particolari dell' equazione (1).

Se pertanto rappresentiamo per a_x; $a1_x$; $a2_x$; i tre integrali particolari dell' equazione (1) e per

a'_x; $a'1_x$ i due dell' equazione (2), avremo

$$a'_x = \Delta\left(a1_x : a_x\right); \; a'1_x = \Delta\left(a2_x : a_x\right).$$

E siccome l' equazione (3) è, rispetto all' equazione (2), ciò che è questa rispetto alla (1), così trovati gl' integrali particolari dell' equazione (2), si avrà subito quello dell' equazione (3), (giacchè questa, essendo del primo ordine, ha un integrale solo) il quale sarà la differenza finita del quoziente dei due integrali dell' equazione (2).

E di qui concluderemo che tutta la difficoltà d' integrare la proposta equazione del terzo ordine (A), si riduce a trovare tre integrali particolari, che ad essa soddisfacciano nel caso che sia $X = 0$.

§ 51. Se della proposta equazione (A) nel caso di $X = 0$, si conoscesse un integrale particolare, si potrebbe non ostante avere l' integrale completo di essa, anco quando X non è nullo; in fatti allora non conoscendosi due integrali particolari dell' equazione (1), non potrebbero aversi quei dell' equazione (2) e della (3). Ma queste essendo sempre integrabili (§§ 39 e 47), ne segue che potremo anche in questo caso avere i valori di a_x, a'_x, a''_x, e quindi l' integrale completo della proposta.

Il processo adoperato per l' equazioni del terzo ordine, è lo stesso col quale si possono trattare quelle del quarto e degli altri ordini superiori. Si giunge con esso sempre a simili formole ed a simili risultamenti: così si ottiene per mezzo di lui questo teorema generale: *Un equazione lineare colle differenze finite dell' ordine* n^{esimo} *con i coefficienti variabili e col secondo membro funzione dell'* x, *è sempre integrabile completamente, quando si conoscono un numero* $n - 1$, *ed anche* $n - 2$, *d' integrali particolari di essa avuti nella supposizione che il secondo membro sia nullo.*

§ 52. Applichiamo questa teorica generale all' integrazione dell' equazioni con i coefficienti costanti.

Siano i coefficienti a, b, c, e altrettanti costanti. Per integrare l' equazione

$$(A) \ldots . \; ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + ey_{x+3} = X$$

conviene dunque conoscere gl' integrali particolari dell' equazione

$$(1) \ldots . \; ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + ey_{x+3} = 0.$$

Poniamo $y_x = Aa^x$ essendo A, a due costanti da determinarsi, e fatta l' opportuna sostituzione nella equazione (1), avremo, per determinare a, l'equazione del terzo grado $a + ba + ca^2 + ea^3 = 0$, e la A resterà arbitraria. Dunque una radice di questa equazione elevata alla potenza x, e moltiplicata per una costante arbitraria A, forma quel valore di y_x che sostituito nell' equazione (1) la rende identica; egli è dunque un suo integrale particolare.

Se indichiamo pertanto con a, a', a'' le tre radici di quell' equazione algebrica, e per A, A', A' tre costanti arbitrarie, avremo questi tre integrali particolari dell' equazione (1)

$$Aa^x, \; A'a'^x, \; A''a''^x.$$

Da questi si ricaveranno i due integrali particolari dell' equazione (2) del § 50, e saranno

$$\Delta \frac{A'a'^x}{Aa^x}, \; \Delta \frac{A''a''^x}{Aa^x}, \text{ e differenziando}$$

$$\frac{A'}{A}\left(\frac{a'}{a} - 1\right) \cdot \frac{a'^x}{a^x}; \quad \frac{A''}{A}\left(\frac{a''}{a} - 1\right) \cdot \frac{a''^x}{a^x};$$

ovvero (essendo A', A'' due costanti arbitrarie)

$$\frac{A'}{A} \cdot \frac{a'^x}{a^x}, \quad \frac{A''}{A} \cdot \frac{a''^x}{a^x}.$$

Da questi ultimi si ricaverà l' integrale della equazione (3), il quale sarà

$\Delta \frac{A'' a''^x}{A' a'^x}$, ovvero $\frac{A''}{A'_1} \cdot \frac{a''^x}{a'^x}$, giacchè si considera

contenuto in A'' il coefficiente $\frac{a''}{a'} - 1$.

Avremo pertanto

$a_x = A a^x$; $a'_x = \frac{A' a'^x}{A a^x}$; $a''_x = \frac{A'' a''^x}{A' a'^x}$; e quindi

$$y_x = A a^x \cdot \Sigma \frac{A' a'^x}{A a^x} \Sigma \frac{A'' a''^x}{A' a'^x} \times$$

$$\Sigma \frac{X}{e A a^{x+3} \cdot \frac{A' a'^{x+2}}{A a^{x+2}} \cdot \frac{A'' a''^{x+1}}{A' a'^{x+1}}}$$

$y_x = -\frac{1}{a} \cdot a^x \Sigma \frac{a'^x}{a^x} \Sigma \frac{a''^x}{a'^x} \Sigma \frac{X}{a''^x}$; ove a, a', a'' sono le tre radici dell' equazione $a + ba + ca^2 + ea^3 = 0$.

§ 53. Ed in generale se l' equazione colle differenze finite è dell' ordine n coi coefficienti costanti, è

$(A) \ldots a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + \ldots + p y_{x+n} = X$

il suo integrale sarà

$$y_x = \pm \frac{a^x}{a} \Sigma \frac{a'^x}{a^x} \Sigma \frac{a''^x}{a'^x} \ldots \Sigma \frac{a^{(n-1)^x}}{a^{(n-2)^x}} \Sigma \frac{X}{a^{(n-1)^x}};$$

e sarà completo perchè, eseguite l' integrazioni, conterrà un numero n di costanti arbitrarie introdotte dagli n segni sommatori.

Di quei due segni prenderemo il superiore per n pari, e l'inferiore per n dispari.

Le quantità a, a', a'', ... $a^{(n-2)}$, $a^{(n-1)}$ saranno le n radici dell'equazione

$$(a) \ldots\ldots a + ba + ca^2 + ea^3 + \ldots\ldots + pa^n = 0.$$

Se alcune di queste radici saranno eguali, per esempio, $a = a' = a'' = a'''$, l'integrale avrà questa forma $y_x = \pm \frac{a^x}{a} \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \frac{a''''^x}{a^x} \ldots\ldots \Sigma \frac{X}{a^{(n-1)^x}}$,

e sarà sempre completo perchè i segni sommatori essendo di numero n, introdurranno sempre un numero n di costanti arbitrarie.

Se il secondo membro dell'equazione sarà nullo, se, cioè, $X = 0$, allora

$$(B) \ldots y_x = \pm \frac{a^x}{a} \Sigma \frac{a'^x}{a^x} \Sigma \frac{a''^x}{a'^x} \ldots \Sigma \frac{a^{(n-1)^x}}{a^{(n-2)^x}} \Sigma\, 0;$$

ed eseguendo l'integrazione si troverà in fine

$$(C) \ldots y_x = Aa^x + A'a'^x + A''a''^x + \ldots + A^{(n-1)}a^{(n-1)^x}$$

ove A, A', A''.... $A^{(n-1)}$ saranno le costanti arbitrarie di numero n.

Quest' ultima espressione dell'integrale completo non è altro che la somma degli n integrali particolari della proposta; e si poteva subito ottenere elevando ciascuna radice alla potenza x, moltiplicandola per una costante arbitraria, e prendendo la somma di tutti questi termini, conforme a ciò che si è insegnato al § 45.

§ 54. Data un' equazione da integrarsi, della quale il secondo membro sia nullo, possiamo tanto fare uso della formola (B) quanto della (C). Trovati i valori delle radici a, a', a'', ecc. nel primo caso, li sostituiremo nella formola (B), e poi faremo le

integrazioni, e così otterremo l' espressione dell' integrale completo; nel secondo, sostituite queste radici nella formola (C), avremo a dirittura l' integrale della data equazione.

In quest' ultimo caso però la formola dà l' integrale incompleto quando alcune di quelle radici sono eguali tra loro. In fatti supponiamo che due radici α, α' siano eguali; allora due degl' integrali particolari si riducono ad un solo, e si ha

$$y_x = (A + A')\,\alpha'^x + A''\alpha''^x + \ldots + A^{(n-1)}\,\alpha^{(n-1)^x},$$

ovvero, facendo $A + A' =$ ad una sola costante A',

$$y_x = A'\alpha'^x + A''\alpha''^x \ldots + A^{(n-1)}\,\alpha^{(n-1)^x},$$

e questa espressione sarà la somma di $n - 1$ integrali particolari; le mancherà in conseguenza una costante arbitraria, e l' integrale sarà incompleto.

Ciò premesso, osserviamo che l' equazione (a), può anche ricevere questa forma:

$$(a)' \ldots \alpha^{x+n} + a'\alpha^{x+n-1} + b'\alpha^{x+n-2} + \ldots + p'\alpha^x = 0,$$

essendo $a' = \frac{q}{p}$, $b' = \frac{r}{p}$, ... $p' = \frac{a}{p}$.

Se adesso moltiplichiamo ciascun termine dell' equazione $(a)'$ per l' esponente che vi ha l' incognita α, otterremo l' equazione

$$(a)'' \ldots (x+n)\,\alpha^{x+n} + (x+n-1)\,a'\alpha^{x+n-1} + (x+n-2)\,b'\alpha^{x+n-2} + \ldots + xp'\alpha^x = 0.$$

La teorica dell' equazioni c' insegna che le radici dell' equazione $(a)'$ sono i limiti delle radici dell' equazione $(a)''$: se dunque l' equazione $(a)'$ ha due radici eguali, $\alpha = m$, $\alpha' = m$, l' equazione $(a)''$ debbe avere una radice contenuta fra le radici m ed m, cioè una radice $= m$; e generalmente se l' equazione $(a)'$ ha un numero l di radici $= m$, l' equazione $(a)''$ avrà un numero $l - 1$ di radici parimente $= m$:

una adunque di queste radici eguali soddisfarà nel medesimo tempo alle due equazioni $(a)'$, $(a)''$.

Se dunque in vece dell' y_x si prende un tal valore che sostituito nella proposta (A) la trasformi nell' equazione $(a)''$ la quale, quando le radici sono eguali, è soddisfatta ancor essa, questo valore sarà un altro integrale particolare, il quale, aggiunto all' espressione incompleta, la renderà di nuovo completa.

Ora questo valore è $y_x = A\,(x+n)\,a'^x$, essendo a' una delle radici eguali; dunque $y_x = A\,(x+n)\,a'^x$ sarà un altro integrale particolare dell' equazione (A), che, aggiunto all' espressione incompleta, la ridurrà alla seguente

$$y_x = A\,(x+n)\,a'^x + A'a'^x + A''a''^x + \ldots \\ + A^{(n-1)}\,a^{(n-1)^x};$$

Questa, mutandovi la costante, prende la forma

$$y_x = Axa'^x + A'a'^x + A''a''^x + \ldots + A^{(n-1)}\,a^{(n-1)^x};$$

ed allora contenendo n costanti arbitrarie, rappresenta l' integrale completo.

Nel modo stesso si proverà che se abbiamo un altro pajo qualunque di radici eguali $a''' = a''''$, basterà, in vece dei due termini $A'''a'''^x + A''''a''''^x$, i quali si riducono ad un solo, mettere i seguenti $A'''xa''''^x + A''''a''''^x$, che sono distinti fra loro.

§ 55. Se nell' equazione $(a)''$ si moltiplica ciascun termine pel respettivo esponente di a, avremo l' equazione

$$(a)''' \ldots (x+n)^2 a^{x+n} + (x+n-1)^2 a' a^{x+n-1} + \ldots \\ + x^2 p' a^x = 0,$$

e le radici dell'equazione $(a)''$ saranno i limiti delle radici dell' equazione $(a)'''$; di modo che se l'equazione $(a)'$ avrà l radici eguali ad m, l' equazione $(a)''$ avrà $l-1$ radici eguali ad m, e l' equazione $(a)'''$ ne avrà un numero $l-2$ parimente eguali ad m: così una di queste radici eguali soddisfarà nello stesso tempo alle tre equazioni $(a)'$, $(a)''$, $(a)'''$.

Siano pertanto tre radici eguali $a = a' = a''$; i tre integrali particolari Aa^x, $A'a'^x$, $A''a''^x$ si riducono ad un solo, e mancano perciò all' espressione dell'y_x due costanti arbitrarie.

Se adunque prenderemo in questo caso due tali valori dell' y_x, che sostituiti successivamente nella proposta, la trasformino nelle due equazioni $(a)''$, $(a)'''$, questi saranno due nuovi integrali particolari, i quali aggiunti all' espressione incompleta dell' y_x, la completeranno di nuovo.

E facile vedere che tali valori dell'y_x sono

$$y_x = A(x+n)\,a''^x, \quad y_x = A'(x+n)^2\,a''^x,$$

assendo a'' una delle tre radici egnali.

Aggiungendo ora all' espressione incompleta dell' y_x i due integrali particolari trovati, avremo

$$y_x = A(x+n)\,a''^x + A'(x+n)^2 a''^x + A''\cdot a''^x + \ldots$$
$$+ A^{(n-1)}\cdot a^{(n-1)^x};$$

e cangiando la forma delle costanti

$$y_x = Axa''^x + A'x^2a''^x + A''a''^x + \ldots + A^{(n-1)}\cdot a^{(n-1)^x}:$$

Espressione che rappresenterà l' integrale completo della proposta.

Così quando avremo tre radici eguali qualunque, per esempio a''', a''''; a^{v}, in vece dei termini

$A''' a'''^{x} + A'''' a''''^{x} + A^{v} a^{vx}$, che si riducono ad un solo, dovremo mettere i tre

$A''' x^2 \cdot a^{vx} + A'''' x \cdot a^{vx} + A^{v} \cdot a^{vx}$, che sono sempre diversi.

Nel modo stesso si dimostrerebbe che se abbiamo un numero l di radici eguali

$a, a', a'' . a''', \ldots . a^{(l-1)}$ in vece degli l termini

$Aa^{x} + A'a'^{x} + \ldots + A^{(l-1)} a^{(l-1)^x}$, che si riducono ad un solo, converrà mettere gli l termini seguenti

$$A \cdot x^{l-1} \cdot a^{(l-1)^x} + A' \cdot x^{l-2} \cdot a^{(l-1)^x} + \ldots\ldots$$
$$+ A^{(l-2)} \cdot x \cdot a^{(l-1)^x} + A^{(l-1)} \cdot a^{(l-1)^x},$$

ed allora l' integrale si conserverà completo.

§ 56. Facciamo un qualche esempio. Si voglia il termine generale della serie ricorrente

Indici . . . . . 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... x
Termini . . . 1 , 2 , 4 , 9 , 30 , 157 , , ... y_x

nella quale un termine qualunque y_{x+3} è eguale al 5 innalzato alla potenza x sommato con i termini y_{x+2}, y_{x+1}, y_x moltiplicati il primo per 9, il secondo per — 26, il terzo per 24. Avremo in questo caso $y_{x+3} = 5^x + 9y_{x+2} - 26y_{x+1} + 24y_x$, ovvero

$-24y_x + 26y_{x+1} - 9y_{x+2} + y_{x+3} = 5^x$ equazione del terz' ordine.

Per l' equazione di un tale ordine l' integrale è

$$y_x = -\frac{a^x}{a}\Sigma\frac{a'^x}{a^x}\Sigma\frac{a''^x}{a'^x}\Sigma\frac{X}{a''x};$$

Essendo $a = -24$, $X = 5^x$, ed a, a', a'' le radici di questa equazione

$a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$, e perciò

$a = 2$, $a' = 3$, $a'' = 4$: avremo dunque

$y_x = \frac{2^x}{24}\Sigma\frac{3^x}{2^x}\Sigma\frac{4^x}{3^x}\Sigma\frac{5^x}{4^x}$, e facendo le successive integrazioni

$$y_x = \frac{2^x}{24}\left(4\frac{5^x}{2^x} + A\frac{4^x}{2^x} + A'\frac{3^x}{2^x} + A''\right)$$

$= \frac{5^x}{6} + A \cdot 4^x + A' \cdot 3^x + A'' \cdot 2^x$ essendo A, A', A'' le tre costanti arbitrarie portate dalle integrazioni.

Per determinare le costanti, facciamo nell' espressione del termine generale successivamente $x = 0, 1, 2$, ed avremo

$$y_0 = 1 = \frac{1}{6} + A + A' + A''$$

$$y_1 = 2 = \frac{5}{6} + 4A + 3A' + 2A''$$

$$y_2 = 4 = \frac{25}{6} + 16A + 9A' + 4A''.$$

Per mezzo di queste equazioni si trova

$A = -\frac{3}{6}$, $A' = \frac{3}{6}$, $A'' = \frac{5}{6}$, e fatte le sostituzioni nell' espressione generale di y_x, avremo il termine generale della nostra serie

$$y_x = \frac{5^x - 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x}{6}.$$

§ 57. Per un secondo esempio abbiasi la serie
Indici . . . . . . 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... x
Termini . . . . 0 , 0 , 1 , 5 , 17 , 49 , ... y_x
nella quale un termine qualunque, come y_{x+3}, è eguale alla somma dei termini antecedenti, il primo moltiplicato per 5, il secondo per -8, il terzo per 4, e cerchiamone la somma.

Converrà trovare prima il di lei termine generale: ora la legge di questa serie ci dà l'equazione $y_{x+3} = 5y_{x+2} - 8y_{x+1} + 4y_x$, ovvero $-4y_x + 8y_{x+1} - 5y_{x+2} + y_{x+3} = 0$, colle differenze finite del terzo ordine, per la quale si ha

$y_x = -\frac{a^x}{a} \Sigma \frac{a'^x}{a^x} \Sigma \frac{a''^x}{a'^x} \Sigma 0$: e siccome nel nostro caso

$a = -4$, $a = a' = 2$, $a'' = 1$; perciò

$y_x = \frac{2^x}{4} \Sigma\Sigma \frac{1}{2^x} \Sigma 0$: ed eseguite le integrazioni

$y_x = C + C'x \cdot 2^x + C''2^x$; C, C' C'' sono le tre costanti arbitrarie.

Facendo $x = 0, 1, 2$, ed osservando che $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, avremo, per determinare le costanti, queste equazioni

$0 = C + C''$
$0 = C + 2C' + 2C''$
$1 = C + 8C' + 4C''$

dalle quali si ricava $C' = \frac{1}{2}$, $C'' = -1$, $C = 1$:

sarà in conseguenza $y_x = 1 + x \cdot 2^{x-1} - 2^x$.

Per avere poi la cercata somma basterà (31) aggiungere all' integrale del termine generale lo stesso termine generale. Così rappresentando questa somma per S, avremo

$$S = y_x + \Sigma y_x$$

$$= 1 + x \cdot 2^{x-1} - 2^x + \Sigma 1 + \Sigma 2^{x-1} \cdot x - \Sigma 2^x,$$

e perciò

$$S = 1 + x \cdot 2^{x-1} - 2^x + x + x \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} + C$$

$$= C + 1 + x + x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x:$$

La costante C si determina osservando che la somma S debb' essere nulla quando $x = 0$: avremo allora $0 = C + 1 - 3$, quindi $C = 2$: dunque

$$S = 3 + x + x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x.$$

Se si fa $x = 5$, avremo

$$S = 3 + 5 + 5 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^5 = 3 + 5 \cdot 32 - 3 \cdot 32 + 5,$$

$S = 67 + 5 = 72$, come si può verificare.

CAPO VII.

Dell' integrazione dell' equazioni colle differenze finite a più variabili.

§ 58. Quando fra un numero m di funzioni y_x, z_x, u_x, ecc., e la variabile x si ha un numero m d' equazioni a differenze finite, potremo sempre, per mezzo dell' eliminazione, giungere ad una equazione

che contenga una sola di queste funzioni : tale equazione sarà però di un ordine maggiore di quello dell' equazioni proposte : dimostreremo tutto questo per due equazioni di secondo ordine, e sarà facile estenderne il metodo ad un qualunque numero di equazioni, fra un qualunque numero di variabili.

Siano adunque da determinarsi i valori completi di y_x, e z_x per mezzo delle seguenti equazioni (1), (2):

$$(1) \ldots \left.\begin{array}{l} a_x y_x + b_x y_{x+1} + c_x y_{x+2} \\ + a'_x z_x + b'_x z_{x+1} + c'_x z_{x+2} \end{array}\right\} = \phi(x)$$

$$(2) \ldots \left.\begin{array}{l} A_x y_x + B_x y_{x+1} + C_x y_{x+2} \\ + A'_x z_x + B'_x z_{x+1} + C'_x z_{x+2} \end{array}\right\} = \phi'(x)$$

nelle quali tanto i coefficienti, quanto i secondi membri sono funzioni date dell' x.

Se ricaviamo dalla seconda equazione il valore di z_{x+2} e lo sostituiamo nella prima, avremo una equazione di questa forma :

$$(3) \ldots \left.\begin{array}{l} a1_x \cdot y_x + b1_x \cdot y_{x+1} + c1_x \cdot y_{x+2} \\ + a'1_x \cdot z_x + b'1_x z_{x+1} \end{array}\right\} = \phi 1(x),$$

nella quale i coefficienti e il secondo membro saranno quelli che porta una tal sostituzione.

Se in questa equazione facciamo che x divenga $x+1$, avremo

$$(4) \ldots \left.\begin{array}{l} a1_{x+1} \cdot y_{x+1} + b1_{x+1} \cdot y_{x+2} \\ + c1_{x+1} \cdot y_{x+3} + a'1_{x+1} \cdot z_{x+1} \\ + b'1_{x+1} \cdot z_{x+2} \end{array}\right\} = \phi 1(x+1).$$

Se adesso si sostituisce in questa equazione il valore di z_{x+2} ricavato dalla equazione (2), avremo una equazione di questa forma:

$$(5) \ldots \left.\begin{array}{l} a2_x \cdot y_x + b2_x \cdot y_{x+1} \\ + c2_x \cdot y_{x+2} + d2_x \cdot y_{x+3} \\ + a'2_x \cdot z_x + b'2_x \cdot z_{x+1} \end{array}\right\} = \phi 2\,(x);$$

$a2_x$, $b2_x$ ecc. $\phi 2\,(x)$ rappresentano i coefficienti dopo questa sostituzione. Il valore di z_{x+1}, ricavato da questa equazione (5), si sostituisca nell' equazione (3), ed avremo un' equazione di questa forma

$$(6) \ldots \left.\begin{array}{l} a3_x \cdot y_x + b3_x \cdot y_{x+1} \\ + c3_x \cdot y_{x+2} + d3_x \cdot y_{x+3} \\ + a'3_x \cdot z_x \end{array}\right\} = \phi 3\,(x),$$

la quale ci dà il valore della z_x. Per mezzo delle due equazioni (3) e (5) eliminata la funzione z_x, avremo il valore di z_{x+1}, il quale facendovi crescere x di una unità, diverrebbe il valore di z_{x+2}. Ora sostituiti questi tre valori nell' equazione (1), questa conterrà solamente le variabili x, y_x; sarà però del quarto ordine ed avrà questa forma:

$$(P) \ldots a4_x \cdot y_x + b4_x \cdot y_{x+1} + c4_x \cdot y_{x+2} + d4_x \cdot y_{x+3} + e4_x \cdot y_{x+4} = X;$$

$a4_x$, $b4_x$ ecc. X rappresentano funzioni conosciute dell' x, e sono esse composte dei coefficienti delle equazioni proposte e dei loro secondi membri.

L' integrazione adunque delle due equazioni (1), (2) dipende dall' integrazione dell' equazione (P).

Se i coefficienti della proposta sono costanti, ancora i coefficienti della risultante equazione (P) sono parimente costanti, e perciò essa è sempre integrabile.

L' ordine dell' equazioni proposte (1), (2) era il medesimo per ambedue; potrebb' essere anche diverso giacchè sarebbe cosa facile il ridurre l' equazioni al medesimo ordine con l' aggiungere i termini che mancano, e fare nella finale equazione eguali a zero i coefficienti dei termini aggiunti.

Questo metodo è generale per qualunque numero m d' equazioni, fra un numero qualunque $m+1$ di variabili, e di qualunque ordine n.

§ 59. Posti i coefficienti costanti, se i secondi membri sono nulli, possiamo anche così trattare quelle equazioni. Facciasi $y_x = \alpha^x$, $z_x = \alpha^x \cdot l$, essendo α, l due costanti da determinarsi. Sostituendo questi valori nell' equazioni (1), (2), avremo, dopo aver tutto diviso per α^x,

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + (a' + b'\alpha + c'\alpha^2)\, l = 0,$$

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + (A' + B'\alpha + C'\alpha^2)\, l = 0$$

dalle quali debbono determinarsi α ed l. Preso il valore di l da una di queste equazioni e sostituito nell' altra, dopo averla ridotta, avremo per determinare α l' equazione

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(A' + B'\alpha + C\alpha^2)$$
$$-(a' + b'\alpha + c'\alpha^2)(A + B\alpha + D\alpha^2) = 0.$$

Questa essendo del quarto grado ci dà quattro valori per α, per mezzo dei quali s' avranno altrettanti valori dell' l: questi valori poi di α e di l ci daranno quattro valori particolari dell' y_x e della z_x, i

moltiplicati per costanti arbitrarie e sommati, ci daranno i valori completi dell' y_x e della z_x: così se i quattro valori dell' a sono a, a', a'', a''', e quelli del l sono l, l', l'', l''', avremo questo valore completo dell' y_x

$$y_x = Aa^x + A'a'^x + A''a''^x + A'''a'''^x;$$

e per z_x quest' altro

$$z_x = Aa^x \cdot l + A'a'^x \cdot l' + A''a''^x \cdot l'' + A'''a'''^x \cdot l'''.$$

Le costanti A, A', A'', A''' dell' y_x sono le stesse che quelle della z_x.

Ad una equazione colle differenze finite del quarto ordine con i coefficienti costanti saremmo giunti se avessimo adoperato il metodo del § antecedente.

Se il numero dell' equazioni colle differenze fosse minore del numero delle funzioni incognite, si comprende facilmente che alcune di queste funzioni resterebbero al nostro arbitrio, pel che potrebbero anche stabilirsi delle relazioni arbitrarie tra quelle funzioni onde avere un numero d' equazioni eguale al numero delle funzioni incognite.

§ 60. Per fare un' applicazione prendiamo a risolvere un problema del giuoco degli scacchi.

PROBLEMA.

Data nello scacchiere una casa qualunque, e supponendo la torre posta in una casa parimente data, si dimanda in quante maniere la torre facendo un numero x di mosse, possa andare dalla casa o dallo scacco in cui si trova, alla detta determinata casa, che chiamo casa di arrivo.

Conviene distinguere in questo problema tre casi: 1.° Quando la torre si trova nella stessa casa in cui anche dopo x mosse debbe trovarsi, quando, cioè, la casa della torre è la stessa casa di arrivo. 2.° Quando lo scacco della torre e lo scacco dell' arrivo sono sopra la stessa fila, in modo che possa la torre in una mossa audare allo scacco dell' arrivo: 3.° Quando la torre e lo scacco dell' arrivo non sono in alcuna delle suddette due situazioni.

Rappresentiamo con y_x il numero cercato delle maniere nel primo caso; con z_x lo stesso numero nel secondo caso, e con u_x il numero delle maniere nel terzo caso.

Supponiamo che la torre debba fare $x+1$ mosse: sarà allora il cercato numero di maniere y_{x+1} nel primo caso; z_{x+1} nel secondo; e u_{x+1} nel terzo. D' altronde nel primo caso può la torre con la prima mossa andare in quattordici scacchi diversi, in ciascun dei quali essa si trova nella situazione voluta dal secondo caso, ed ha perciò in ciascuno di essi un numero di maniere z_x per arrivare in x mosse allo scacco d'onde era partita; dunque il numero delle maniere per $x+1$ mosse, sarà ancora espresso nel primo caso con $14z_x$: dunque $y_{x+1} = 14z_x$.

Nel secondo caso può la torre con la prima mossa passare in 14 scacchi, sette, cioè, sopra la fila che unisce lo scacco di partenza della torre e lo scacco dell' arrivo, ed altri sette sopra la fila a questa perpendicolare. In ciascuno degli ultimi sette essa prende una posizione appartenente al terzo caso, e perciò in virtù di questi sette scacchi avremo un numero di maniere rappresentato per $7u_x$. In sei scacchi dei primi sette essa prende una posizione appartenente

al secondo caso, ed in virtù di essi abbiamo il numero delle maniere rappresentato da $6z_x$, e nell'altro scacco essa prende la posizione appartenente al primo caso, ed in virtù di esso si ha il numero delle maniere y_x; dunque nel secondo caso il numero totale delle maniere per $x+1$ mosse sarà $y_x + 6z_x + 7u_x$, e perciò

$$z_{x+1} = y_x + 6z_x + 7u_x.$$

Nel terzo caso un simile raziocinio ci darà la equazione $u_{x+1} = 2z_x + 12u_x$.

Avremo adunque per risolvere il problema queste tre equazioni colle differenze finite del primo ordine

$$y_{x+1} = 14z_x. \quad z_{x+1} = y_x + 6z_x + 7u_x.$$

$$u_{x+1} = 2z_x + 12u_x.$$

fra le tre funzioni incognite y_x, z_x, u_x.

Seguendo il metodo spiegato sopra (58) elimineremo z_x e z_{x+1} per mezzo delle due prime equazioni e dell'equazione $y_{x+2} = 14z_{x+1}$ dedotta dalla prima, ed avremo

$$(1) \ldots . y_{x+2} = 14y_x + 6y_{x+1} + 98u_x.$$

Da quest' ultima equazione si ricaverà subito quest' altra

$$(2) \ldots .. y_{x+3} = 14y_{x+1} + 6y_{x+2} + 98u_{x+1}.$$

Sostituendo nella terza dell' equazioni proposte il valore di z_x, s' avrà un' altra equazione

$$(3) \ldots .. 14u_{x+1} = 2y_{x+1} + 168u_x.$$

Ora per mezzo di queste equazioni (1), (2), (3) eliminiamo u_x e u_{x+1}, ed avremo in fine, per determinare y_x, quest' equazione colle differenze finite del terz' ordine:

$$y_{x+3} = 18y_{x+2} - 44y_{x+1} - 168y_x,$$

l' integrale della quale è $y_x = Aa^x + Ba'^x + Ca'^x$, essendo a, a', a'' le tre radici di questa equazione $a^3 - 18a^2 + 44a + 168 = 0$: ora queste radici sono $a = 6$, $a' = 14$, $a'' = -2$, e perciò

$y_x = A \cdot 6^x + B \cdot 14^x + C(-2)^x$: le quantità A, B, C rappresentano le tre costanti arbitrarie.

Trovato il valore di y_x, ricaveremo dalla prima dell' equazioni proposte il valore di z_x, e questo sarà

$$z_x = \frac{3}{7} A \cdot 6^x + B\, 14^x - \frac{1}{7} C(-2)^x.$$

Dalla seconda poi avremo

$$u_x = -\frac{1}{7} A \cdot 6^x + B \cdot 14^x + \frac{1}{49} C(-2)^x.$$

Per determinare le costanti s' osservi che facendo $x = 1$, abbiamo

$y_x = y_1 = 0$, $z_x = z_1 = 1$, $u_x = 1$, onde queste condizioni daranno

$$6A + 14B - 2C = 0 \qquad \frac{18}{7} A + 14B + \frac{2}{7} C = 1$$

$-\frac{6}{7} A + 14B - \frac{2}{49} C = 0$, dalle quali si ricava

$A = \frac{14}{64}$, $B = \frac{1}{64}$, $C = \frac{49}{64}$: sarà in fine

$$y_x = \frac{14 \cdot 6^x + 14^x + 49(-2)^x}{64}$$

$$z_x = \frac{6 \cdot 6^x + 14^x + 7(-2)^x}{64}$$

$$u_x = \frac{-2 \cdot 6^x + 14^x + (-2)^x}{64};$$

queste formule contengono la soluzione del problema.

Sia $x = 2$, ed avremo $y_x = 14$; $z_x = 6$; $u_x = 2$: cioè la torre, facendo due mosse, può in quattordici maniere uscire dalla casa ove si trova e ritornarvi: facendo parimente due mosse, può la torre in sei maniere andare dalla casa, ove essa trovasi, ad uno scacco qualunque posto nella stessa linea, e facendo anche due mosse, può la torre in sole due maniere andare dallo scacco, in cui essa è, ad un altro scacco posto in un' altra linea qualunque.

CAPO VIII.

Dell' integrazione dell' equazioni nelle quali la differenza finita della x *è una costante o una variabile.*

§ 61. Sia da integrarsi l' equazione colle differenze variabili

$(A) \ldots ay_x + by_{x'} + cy_{x''} = X$, nella quale a, b, c, X sono costanti o variabili come ci piace, ed è $x' = x + \Delta x$, $x'' = x' + \Delta x'$. Noi prendiamo un' equazione del secondo ordine, ma il processo che seguiremo, è buono per l'equazioni di qualunque ordine.

Facciasi $y = a_x \Sigma z_x$ essendo a_x, z_x due funzioni di x da determinarsi, ed avremo

$y_{x'} = a_{x'} \Sigma z_{x'}$; $y_{x''} = a_{x''} \Sigma z_{x''}$,

ora rappresentando con Σz_x la somma dei termini che precedono z_x, con $\Sigma z_{x'}$, quella di quelli che precedono $z_{x'}$, nella serie

ecc. . . . $z_{''x} + z_{'x} + z_x + z_{x'} + z_{x''} + z_{x'''}$ . . . ecc.

ove $''x = '''x + \Delta'''x$; $'x = ''x + \Delta''x$; $x = 'x + \Delta'x$; $x' = x + \Delta x$; $x'' = x' + \Delta x'$; ecc. si avrà

$y_x = a_{x'} (z_x + \Sigma z_x)$; $y_{x''} = a_{x''} (z_{x'} + \Sigma z_{x'})$;

Sostituendo questi valori nella (*A*) e seguendo la stessa strada battuta al § 45, si avrà

$$\left. \begin{array}{l} (a \cdot a_x + b \cdot a_{x'} + c \cdot a_{x''}) \Sigma z_x \\ \quad + (b \cdot a_{x'} + c \cdot a_{x''}) z_x \\ \quad\quad + c \cdot a_{x''} \cdot z_{x'} \end{array} \right\} = X.$$

Facciamo $= 0$ il coefficiente di Σz_x, e per determinare le due funzioni a_x, z_x avremo queste due equazioni

(1) . . . . $a \cdot a_x + b \cdot a_{x'} + c \cdot a_{x''} = 0$;

(*a*) . . . . $b' \cdot z_x + c' z_{x'} = X$;

ove è $b' = b \cdot a_{x'} + c \cdot a_{x''}$; $c' = c \cdot a_{x''}$.

La prima di queste due equazioni non è altro che la proposta nella quale si fa $X = 0$; e la seconda è una equazione dello stesso genere della proposta, ma di un ordine inferiore di un' unità.

§ 62. Per avere il valore di z_x supponiamo $z_x = a'_x \Sigma z'_x$; avremo allora $z_{x'} = a'_{x'} (z'_x + \Sigma z'_x)$, e sostituendo questo valore nell' equazione (*a*), essa si

cangerà in questa

$$\left(b' \cdot a'_x + c' \cdot a'_{x'}\right) \Sigma z'_x + c' \cdot a'_{x'} \cdot z'_x = X.$$

Facciamo $=0$ il coefficiente di $\Sigma z'_x$ ed avremo, per determinare a'_x, z'_x, queste due equazioni

$$(2) \ldots\ldots b' \cdot a'_x + c' \cdot a'_{x'} = 0\,;$$

$$(b) \ldots\ldots c' \cdot a'_{x'} \cdot z'_x = X.$$

L' equazione (b) ci dà $z'_x = \frac{X}{c' \cdot a'_{x'}}$; dunque l' integrale della proposta (A) sarà

$$y_x = a_x \Sigma a'_x \Sigma \frac{X}{c' \cdot a'_{x'}},$$ i valori di a_x, a'_x dipendendo dall' integrazione delle equazioni (1), (2), che sono equazioni lineari del primo e secondo ordine col secondo membro nullo.

§ 63. Per integrare l' equazione (1) facciamo $a_x = \beta_u$, e sia u tal funzione dell' x, che quando x aumenta dell' Δx, u aumenti dell' unità: Avremo allora $a_{x'} = a_{x+\Delta x} = \beta_{u+1}$; $a_x = \beta_{u+2}$, e quindi, sostituito il valore dell' x nei coefficienti dell' equazione (1), essa si ridurrà alla $a\beta_u + b\beta_{u+1} + c\beta_{u+2} = 0$ che sarà un' equazione nella quale le differenze della variabile saranno eguali all' unità. Nel medesimo modo trattando l' equazione (2), cioè facendo $a'_x = \beta'_u$, si cambierà essa in un' altra nella quale le differenze saranno eguali all' unità, e sarà perciò svanita ogni difficoltà che proveniva dall' essere le differenze della x diverse dall' uno.

Avremo pertanto $y_x = \beta_u \Sigma \beta'_u \Sigma \frac{U}{c \cdot \beta_{u+2} \beta'_{u+1}}$,

ove U sarà il valore dell'x, allorchè si cangia questo nella corrispondente funzione dell' u.

Si faranno poi le integrazioni al solito come pei casi trattati nei precedenti capitoli, considerando, cioè, u come una variabile, il cui incremento è la unità.

Se i coefficienti dell' equazione (A) saranno costanti, allora l' integrale di essa sarà

$y_x = \frac{\beta^u}{a} \cdot \Sigma \frac{\beta'^u}{\beta^u} \Sigma \frac{U}{\beta'^u}$, essendo β, β' le due radici dell' equazione $a + b\beta + c\beta^2 = 0$; e questo integrale sarà sempre completo perchè i due segni sommatorj introdurranno due costanti arbitrarie. Fatte le integrazioni, ed avuto il valore dell' y espresso con u, se si ripone in vece dell' u quella tal funzione dell' x, otterremo il valore dell' y_x dato per x.

§ 64. Il nodo adunque della quistione è ridotto a trovare quella funzione u dell' x, la quale cresce di uno, quando x cresce di Δx, essendo questo Δx una costante data, o una funzione parimente data dell' x: Rappresentando con u_x questa funzione, la proprietà ch' essa debbe avere sarà espressa dalla equazione $u_{x+\Delta x} = u_x + 1$, dalla quale ricaveremo $u_{x+\Delta x} - u_x = 1$, e perciò integrando $u_x = \Sigma 1$; e così la ricercata funzione è eguale all' integrale finito dell' unità, preso quell' integrale secondo il sistema della differenza variabile che regna nella proposta.

L' integrale pertanto dell' equazioni lineari del-l' ordine secondo nel caso dei coefficienti costanti, sarà

$y_x = \frac{\beta^{\Sigma 1}}{a} \Sigma \frac{\beta'^{\Sigma 1}}{\beta^{\Sigma 1}} \Sigma \frac{U}{\beta'^{\Sigma 1}}$; se la differenza dell' x

fosse eguale ad una costante b', avremmo $\Sigma 1 = \frac{x}{b'} + C$, e facendo per più semplicità $C = 0$, $\Sigma 1 = \frac{x}{b'}$, l'integrale adunque ci è data dalla stessa formula trovata qui sopra, se in vece di $\Sigma 1$ vi si pone $\frac{x}{b'}$.

§ 65. Si può trovare il valore dell' u coll' integrazione di una equazione a differenze finite costanti del primo ordine, ma non lineare. In fatti siccome è $u_{x + \Delta x} = u_x + 1 = u + 1$, avremo $x + \Delta x = p_{u+1}$ rappresentando con p_{u+1} una funzione di $u_x + 1$, ovvero di $u + 1$. Ora supponiamo $\Delta x = \phi(x) - x$, ed avremo $x + \phi(x) - x = p_{u+1}$ e perciò $\phi(x) = p_{u+1}$.

Siccome poi $u_x = u$, $u_{\phi(x)} = u + 1$, e u_x, $u_{\phi(x)}$ sono due funzioni fatte nel modo stesso una coll' x, l' altra colla $\phi(x)$, sarà perciò $x = p_u$: sostituendo il valore di x nell' equazione $\phi(x) = p_{u+1}$, si avrà $\phi(p_u) = p_{u+1}$, equazione dalla cui integrazione dipende il valore di p_u. Trovato p_u eguale ad una determinata funzione di u, sarà x eguale a quella stessa funzione; avremo adunque una equazione fra x ed u, e perciò u funzione dell' x. Percorriamo alcuni casi d' integrabilità di questa equazione.

Sia $\phi(x) = ax + b$, ove a e b sono quantità costanti, ed avremo allora $p_{u+1} = ap_u + b$, ovvero $ap_u - p_{u+1} = -b$; e facilmente troveremo

$p_u = -\frac{a^u}{a}\Sigma\frac{-b}{a^u} = ba^{u-1}\Sigma\frac{1}{a^u}$, poichè l' equazione $a - a = 0$ ci dà $a = a$; eseguendo ora l' integrazione, si troverà

$$p_u = ba^{u-1}\left(\frac{a^{-u}}{\frac{1}{a}-1} + C\right) = ba^{u-1}\left(\frac{a^{-u+1}}{1-a} + C\right),$$

ovvero

$p_u = \frac{b + Cba^{u-1}}{1-a} = \frac{-Cba^{u-1} - b}{a-1}$, e mutando la forma della costante, cioè facendo $C = -\frac{Ca}{b}$, sarà

$$p_u = \frac{Ca^u - b}{a-1}.$$

Supponendo $C = 1$, s' avrà

$p_u = \frac{a^u - b}{a-1}$, onde $x = \frac{a^u - b}{a-1}$, ed

$$u = \frac{\log(b + (a-1)x)}{\log. a}.$$

Se $\phi(x) = ax^m$, avremo $p_{u+1} = ap_u^m$, e ponendo $p_u = a^{q_u}$, otterremo $a^{q_{u+1}} = a \cdot a^{mq_u} = a^{mq_u + 1}$ prendendo poi i logaritmi, si ha $q_{u+1} \log. a = (mq_u + 1) \log. a$, ovvero $q_{u+1} = mq_u + 1$: equazione lineare del primo ordine, la quale integrata ci dà

$q_u = \frac{Cm^u - 1}{m-1}$; onde $p_u = x = a^{\frac{Cm^u - 1}{m-1}}$, e di qui

$u = \frac{\log.\left(\frac{1}{C} + \frac{(m-1)\log. x}{C \log. a}\right)}{\log. m}$. Facciamo $C = \frac{1}{\log. a}$,

e sarà $u = \frac{\log.\log.ax^{m-1}}{\log.m}$.

L' equazioni colle differenze variabili potranno adunque integrarsi, quando alcun geometra avrà insegnato ad integrare completamente l' equazione $\varphi(p_u) = p_{u+1}$, ovvero a trovare il valore generale di $\Sigma 1$ in tutt' i possibili sistemi d' integrazione.

§ 65. Sia proposta da integrarsi l' equazione $y_{x+m} - a_x y_x = X$, nella quale a_x, X sono due funzioni qualunque date dell' x, ed m è una quantità costante qualunque.

Riguardando m come l' aumento o la differenza dell' x, sarà questa un' equazione del primo ordine, e paragonata con l' equazione (A) del § 61, avremo $a = -a_x$, $b = 1$, $c = d = e = \text{ecc.} = 0$, $x' = x + \Delta x = x + m$, $\Delta x = m$.

Sarà dunque $y_x = a_u \Sigma z_x$, essendo a_u dato da questa equazione. $-a_x a_u + a_{u'} = 0$, e z_x da questa altra $a_{u'} z_x = X$. Determinando adesso u a tenore della condizione espressa al § 63, si trova $u = \frac{x}{m}$, e quindi $u' = \frac{x+m}{m} = \frac{x}{m} + 1 = u + 1$: l' equazione adunque,

che determina a_u, sarà (avvertendo che $x = mu$) questa qui $- a_{mu} \cdot a_u + a_{u+1} = 0$, la quale ci dà $a_u = e^{\Sigma l(a_{mu})}$. Si avrà dunque

$$y_x = e^{\Sigma l(a_{mu})} \Sigma \left(X : a_{\frac{x}{m}+1}\right).$$

L'integrale riguardo all' u debbe prendersi nella supposizione che la differenza di n sia l'unità, e quello riguardo all' x nella supposizione che la differenza della variabile sia m; e se si rappresenta con U ciò che diviene X, quando vi si pone mu in vece dell' x, avremo

$y_x = e^{\Sigma l(a_{mu})} \Sigma U : a_{u+1}$ integrando sempre riguardo all' u.

L'integrale adunque completo della proposta sarà

$$y_x = e^{\Sigma l(a_{mu})} \left(C + \Sigma e^{-\Sigma l(a_{mu+m})} U\right).$$

Sia per esempio $m = 2$, $X = 0$, e l'integrale dell' equazione $y_{x+2} = a_x y_x$, sarà

$$y_x = e^{\Sigma l(a_{2u})} C.$$

Ora da ciò che abbiamo detto (§ 39) si ha

$$e^{\Sigma l(a_{2u})} = a_{2u-2} \cdot a_{2u-4} \cdot {}_{2u-6} \ldots\ldots\ldots$$

dunque facendo $2u = x$, sarà

$$y_x = Ca_{x-2} \cdot a_{x-4} \cdot a_{x-6} \ldots \text{ ecc.}$$

l' ultimo fattore sarà a_0, ovvero a_1, secondo che la variabile x è pari ovvero caffo.

CAPO IX.

Dell' eliminazione degl' immaginarj dagl' integrali; e dell' integrazione dell' equazioni non lineari.

§ 67. Se alcune radici dell' equazioni algebriche, le quali bisogna risolvere onde avere gl' integrali delle equazioni lineari, fossero immaginarie, ecco come si opererebbe. Le radici immaginarie possono sempre ridursi alla forma $A + B\sqrt{-1}$, essendo A e B quantità reali: è parimente dimostrato che se in una equazione algebratica vi è una radice della forma $A + B\sqrt{-1}$, ve ne debb' essere ancora un'altra della forma $A - B\sqrt{-1}$; dunque quando si hanno alcune radici immaginarie, nell' espressione completa dell'integrale, vi saranno sotto i segni sommatorj le quantità $(A + B\sqrt{-1})^x$, $(A - B\sqrt{-1})^x$: eseguite però le integrazioni come se gl' immaginarj non vi fossero, compariranno ancora nella formola sviluppata dell' integrale alcune quantità immaginarie, le quali elimineremo, se ci piace, col sostituirvi delle quantità trascendenti, e col dare una certa forma alle costanti arbitrarie portate dalle integrazioni. Così quando il secondo membro dell' equazione lineare del § 53 è nullo, e l'equazione algebratica ha due radici $a^{(n-2)}$, $a^{(n-1)}$ immaginarie, le quali siano $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$, gli ultimi due termini dell' integrale C saranno

$$A^{(n-2)}(a + b\sqrt{-1})^x + A^{(n-1)}(a - b\sqrt{-1})^x:$$

Ora è dimostrato che

$$(a \pm b\sqrt{-1})^x = (a^2 + b^2)^{\frac{x}{2}}(\cos\cdot x\beta \pm \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} x\beta),$$

essendo β l' arco che ha per tangente $\frac{b}{a}$; dunque questi due termini diverranno

$$(a^2+b^2)^{\frac{x}{2}} \cdot \left\{ A^{(n-2)} (\cos \cdot x\beta + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} \cdot x\beta) + A^{(n-1)} \cdot (\cos \cdot x\beta - \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} \cdot x\beta) \right\},$$

i quali si riducono a

$$(a^2+b^2)^{\frac{x}{2}} \cdot \left\{ \left(A^{(n-2)} + A^{(n-1)} \right) \cdot \cos \cdot x\beta + \left(A^{(n-2)} - A^{(n-1)} \right) \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} \cdot x\beta \right\},$$

e facendo

$$A^{(n-2)} + A^{(n-1)} = C,$$

$\left(A^{(n-2)} - A^{(n-1)} \right) \sqrt{-1} = C'$, avremo

$(a^2+b^2)^{\frac{x}{2}} (C \cos \cdot x\beta + C' \operatorname{sen} x\beta)$ per rappresentare quei due termini medesimi.

Quando poi il secondo membro dell' equazione non sia nullo, e che due radici a, a' siano immaginarie, possiamo con la stessa facilità eliminare gli immaginarj per sostituirvi i trascendenti. Si faranno le integrazioni come se le radici fossero state reali, e poi vi sostituiremo i loro valori immaginarj e ne faremo le riduzioni. Non mi vi trattengo.

§ 68. Le costanti che entrano nelle integrazioni possono essere variabili, come osservò pel primo il signor Euler, purchè esse abbiano tal forma che non mutino allorchè la variabile x cresce della differenza 1. Per trovar questa forma, supponiamo che $\phi(x)$ rappresenti una quantità che non cangia valore quando x diviene $x+1$: sarà dunque $\phi(x) =$

$\varphi(x+1)$, ovvero $\varphi(x+1)-\varphi(x)=0$. Integrando tale equazione a tenore delle cose dette al § 53, si ha

$\varphi(x)=a^x\Sigma\frac{0}{a^x}=a^xC$, essendo C una costante arbitraria.

Ora per determinare a abbiamo $a-1=0$; e perciò $a=1$. Ma il signor Euler dimostra nell'introduzione all' analisi sublime che $log.\ 1=\pm 2mp\sqrt{-1}$, indicando per $2p$ la circonferenza del circolo, e per m un numero intero qualunque; dunque

$1=e^{\pm 2mp\sqrt{-1}}$, e quindi avremo $a=e^{\pm 2mp\sqrt{-1}}$;

dunque $\varphi(x)=Ce^{\pm 2mpx\sqrt{-1}}$, e tale sarà la forma variabile che possono prendere le costanti degli integrali. Ora giusta le regole della conversione delle quantità immaginarie in quantità trascendenti, si ha

$e^{\pm 2mpx\sqrt{-1}}=cos\cdot 2mpx\pm\sqrt{-1}\cdot sen\cdot 2mpx$;

e sarà perciò $\varphi(x)$ espresso ancora con $C\cdot(cos\times 2mpx\pm\sqrt{-1}\cdot sen\cdot 2mpx)$. In fatti $2mp$ rappresentando un certo numero di periferie, è chiaro che se $2mpx$ rappresenta un certo arco l, $2mp\ (x+1)$, sarà eguale a $2mp+l$, vale a dire ad un multiplo della periferia del circolo + l'arco l: ora è dimostrato in trigonometria che il $cos\cdot l$ è il medesimo che il $cos\ (l+2mp)$; dunque il $cos\cdot 2mpx$ non varierà quando x crescerà dell' unità. Il medesimo ragionamento vale per $sen\cdot 2mpx$: la quantità adunque $C\ (cos\cdot 2mpx\pm\sqrt{-1}\cdot sen\cdot 2mpx)$ non varierà variando x, poichè le due parti di cui essa è composta, conservano sempre lo stesso valore. Ora essendo C una quantità arbitraria, e le due parti della funzione conservandosi sempre costanti indipendentemente l'una dall' altra, potremo fare $C\sqrt{-1}$ eguale ad una costante indeterminata B; avremo così ora la ricercata forma $A\ cos\cdot 2mpx\pm B\ sen\cdot 2mpx$. Si potranno ancora con maggior generalità rappresentar le costanti arbitrarie

che entrano negl' integrali, col mezzo di funzioni qualunque Ψ della quantità $A \cos 2mpx \pm B \operatorname{sen} 2mpx$, cioè con $\Psi(A \cos 2mpx \pm B \operatorname{sen} 2mpx)$, ed anche con $\phi(\cos 2mpx, \operatorname{sen} 2mpx)$, funzione qualunque di $\cos 2mpx$ e $\operatorname{sen} 2mpx$. Ritorneremo sopra queste considerazioni.

§ 69. L' equazioni non lineari colle differenze finite di rado si sanno integrare, ed a questo proposito il calcolo delle differenze finite è molto imperfetto.

Questa equazione, per esempio,

$a y_x^m = b y_{x+1}^n \cdot y_{x+2}^{n'} \cdot y_{x+3}^{n''} \cdot$ ecc., nella quale m, n' ecc. sono esponenti qualunque, s' integra facilmente riducendola ad una equazione lineare, col mezzo dei logaritmi: in fatti con un tale ripiego otteniamo l' equazione

$la + mly_x = lb + nly_{x+1} + n'ly_{x+2} + n''ly_{x+3} +$ ecc.,

che si riduce a

$X = mz_z - nz_{x+1} - n'z_{x+2} - n''z_{x+3} -$ ecc. facendo $ly_x = z_x$, ed $lb - la = X$.

Per esempio, cerchiamo l'integrale dell'equazione $y^2_{x+1} = y_x \cdot y_{x+2}$, e prendendone i logaritmi, avremo

$ly_x - 2ly_{x+1} + ly_{x+2} = 0$ che si riduce a

$z_x - 2z_{x+1} + z_{x+2} = 0$, facendo $ly_x = z_x$.

L' integrale di quest' ultima equazione è

$z_x = a'^x \Sigma \frac{a'^x}{a^x} \Sigma 0$, (53) essendo a, a' le radici dell' equazione $1 - 2a + a^2 = 0$; ora abbiamo $a = a' =$

1; dunque $z_x = \Sigma\Sigma 0 = Ax + B$, essendo A, B due costanti arbitrarie.

L'integrale pertanto della proposta equazione sarà $y_x = e^B \cdot e^{Ax}$, ovvero, mutando la forma delle costanti, $y_x = C \cdot C'^x$. Questa espressione dell' y_x è il termine generale di una progressione geometrica con qualunque primo termine e con qualunque quoziente; debb' essere di fatto così, poichè l'equazione $y^2_{x+1} = y_x y_{x+2}$ esprime una proprietà delle progressioni geometriche indipendente da quei due elementi.

Per avere l'integrale dell' equazione $y^2_{x+1} = ay_x \cdot y_{x+2} + by_x \cdot y_{x+3}$ nella quale a, b sono quantità costanti, si faccia $y_x = A\alpha^x$, ed avremo, per determinare α, questa equazione $1 = \alpha + b\alpha$: sarà dunque $y_x = A\left(\frac{1-a}{b}\right)^x$: questo integrale però non sarà completo perchè contiene una sola costante arbitraria.

§ 70. Egualmente per mezzo della stessa supposizione potremo avere gl' integrali almeno particolari dell' equazioni fatte come la seguente

$$y^3_x + ay_x y_{x+1} y_{x+2} + by_{x+1} y^2_{x+2} + cy_{x+1} \cdot y_{x+2} \cdot y_{x+3} + ey_{x+2} \cdot y_{x+3} \cdot y_{x+4} = 0$$

nella quale a, b, c, ecc. sono costanti.

In fatti facendo $y_x = A\alpha^x$, noi abbiamo per determinare α quest' equazione algebraica

$1 + a\alpha^3 + b\alpha^5 + c\alpha^6 + e\alpha^9 = 0$, che ci darà nove valori per α, e per conseguenza troveremo nove integrali particolari per quell' equazione di terzo grado e di quarto ordine, ciascuno dei quali conterrà una costante arbitraria.

Se i coefficienti sono variabili, allora la difficoltà cresce maggiormente, e mancano regole generali. Per esempio

$y^2_{x+1} = a_x \cdot y_x y_{x+1} + b_x \cdot y_x y_{x+2}$, nella quale a_x, b_x sono funzioni date di x, può integrarsi ponendo

$y_x = Ae^{\Sigma m_x}$, essendo m_x una funzione dell'x da determinarsi: di fatto se faremo l' opportuna sostituzione e riduzione, avremo per determinare m_x questa equazione

$e^{m_x} = a_x + b_x e^{m_{x+1}}$, la quale si riduce a

$z_x = a_x + b_x z_{x+1}$ (facendo $e^{m_x} = z_x$) che è integrabile completamente.

L' equazione proposta si poteva subito ridurre a quest' ultima ancora in altra guisa. Si divida la medesima per $y_x y_{x+1}$, ed avremo

$\frac{y_{x+1}}{y_x} = a_x + b_x \cdot \frac{y_{x+2}}{y_{x+1}}$, la quale diviene

$z_x = a_x + b_x z_{x+1}$ facendo $\frac{y_{x+1}}{y_x} = z_x$.

Per farne un esempio cerchiamo il termine generale di una serie nella quale, presi tre termini

consecutivi y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, il prodotto del primo nel terzo, meno il prodotto del primo nel secondo, sia eguale al quadrato del secondo.

Questa condizione ci conduce all'equazione $y_x y_{x+2} - y_x y_{x+1} = y^2_{x+1}$, la quale diverrà

$z_{x+1} - z_x = 1$, facendo $\frac{y_{x+1}}{y_x} = z_x$.

L'integrale completo di quest' ultima equazione è $z_x = A + x$; dunque y_x sarà dato dall' equazione $y_{x+1} = (A+x)y_x$, il cui integrale (§ 39) completo è $y_x = (A+0)(A+1)(A+2)(A+3)\ldots\ldots(A+(x-1))A'$. Una tale espressione sarà l' integrale completo della proposta, poichè contiene due costanti arbitrarie A, A'.

Per determinare queste costanti, supponiamo che i due primi termini della serie siano 1, 2, sia, cioè, 1 il termine corrispondente all' indice 1; e 2 il termine corrispondente all' indice 2, avremo allora $y_1 = (A+0)A' = 1$; $y_x = (A+0)(A+1)A' = 2$, onde $AA' = 1$, $A(A+1)A' = 2$, e quindi $A = 1$, $A' = 1$, sarà dunque il ricercato termine generale $y_x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots\ldots x$, e la serie sarà

Indici	1	2	3	4	5	6 x
Termini	1	2	6	24	120	720 . . . . . ecc.

§ 71. Si potrà anco molte volte abbassare il grado di una equazione alle differenze per mezzo della risoluzione algebraica dell' equazioni: sia per esempio l' equazione

$y^2_{x+1} - 2y_x \cdot y_{x+1} + y^2_x = a_x$: in essa poniamo

$y_x + \Delta y_x$ in vece di y_{x+1}, avremo

$\overline{\Delta y}^2_x = a_x$. Quest' ultima equazione si decompone nelle due $\Delta y_x = +\sqrt{a_x}$, $\Delta y_x = -\sqrt{a_x}$; avremo in conseguenza due integrali completi per l' equazione proposta, cioè

$y_x = +\Sigma\sqrt{a_x} + A$,

$y_x = -\Sigma\sqrt{a_x} + A'$. Se poi supponiamo a_x = ad una costante a^2, sarà $y_x = ax + A$, $y_x = -ax + A'$.

Oltre qnesti due integrali possono aversi ancora altre espressioni, le quali soddisfacciano alla proposta: in fatti

$\overline{\Delta y}^2_x = a^2 = a^2 \cdot 1 = a^2(-1)^{2x}$; dunque

$\Delta y_x = \pm a(-1)^x$, e perciò

$y_x = +a\Sigma(-1)^x + B$, $y_x = -a\Sigma(-1)^x + B'$

essendo B, B' due costanti arbitrarie; eseguendo ora le integrazioni, troveremo

$$y_x = -\frac{a}{2}(-1)^x + B; \quad y_x = +\frac{a}{2}(-1)^x + B'.$$

Siccome l'unità è sempre eguale a $(-1)^{2z}$, indicando per $2z$ un numero pari, e per z una qualunque funzione di x intiera, avremo per y_x queste due espressioni più generali

$y_x = a\Sigma(-1)^z + B$, $y_x = -a\Sigma(-1)^z + B'$,

le quali comprendono i due primi integrali; questi in fatti si hanno facendo z eguale ad un numero intiero costante. Non ci estendiamo di più sopra tali ricerche, rispetto a cui sono stati fatti dai geometri assai pochi progressi.

CAPO X.

Delle soluzioni particolari dell' equazioni colle differenze.

§ 72. Incomincio dall' equazioni di primo ordine. Sia l' equazione colle differenze $F(x, y, \Delta y) = 0$, ed abbia questa per integrale $\phi(x, y, a) = 0$, essendo a una costante arbitraria. Quell' equazione colle differenze può sempre riguardarsi come il risultamento (*) dell' eliminazione della costante per mezzo di queste due equazioni

(I) . . . . $\phi(x, y, a) = 0$

(K) . . . . $\phi(x + 1, y + \Delta y, a) = 0$,

l' aumento dell' x essendo 1.

Supponiamo che la a divenga variabile, ma la sua variazione sia tale che i termini da essa introdotti si annullino da sè medesimi: allora l'equazione $\phi(x, y, a) = 0$ continuerà a soddisfare alla differenziale $F(x, y, \Delta y) = 0$, e farà le veci dell' integrale. Ad una tale equazione si dà il nome di *soluzione particolare*. Ecco come potremo trovare quel valore di a.

Nell' ipotesi assunta della variazione dell'a, si ha

(*) Di fatto, in qualunque modo sia nata una equazione colle differenze del primo ordine, per effettivamente integrarla occorre l' integrazione delle formole colle differenze prime, la quale porta di natura sua una costante arbitraria; così l' equazione integrale conterrà questa costante arbitraria che non si trovava nell' equazione alle differenze.

Se poi per mezzo di quest' equazione integrale, fornita di costante arbitraria, e della di lei differenza finita, si elimina la costante, si otterrà un' equazione alle differenze prime, la quale (§ 12) sarà sempre riducibile alla proposta, e ne sarà la medesima cosa; e di qui concluderemo che anche la proposta si potrà sempre considerare dedotta dall' eliminazione di una costante, tra l' integrale completo e la sua differenza finita.

$\phi(x+1, y+\Delta y, a+\Delta a) = 0$,
alla qnale equazione se diamo la forma

(1) . . . . $\phi(x+1, y+\Delta y, a) + P \cdot \Delta a = 0$,

sarà $P \cdot \Delta a$ la totalità dei termini portati dalla variazione dell' a.

Facciamo $P \cdot \Delta a = 0$, ed allora l' equazione (1) sarà la stessa come se a fosse costante.

Dall' equazione $P \cdot \Delta a = 0$ ricaviamo $\Delta a = 0$, ovvero $P = 0$. La prima di queste due equazioni ci dà per a una costante, quindi si ritrova l' integrale completo donde partimmo; la seconda $P = 0$ ci darà quella funzione variabile, che sostituire dobbiamo ad a, onde si ottenga la soluzione particolare. L' equazione $P = 0$ è colle differenze del primo ordine dell' a, e può contenere anche le quantità y e Δy, le quali si elimineranno però in virtù delle equazioni (I), (K); anzi perchè più facile riesca questa eliminazione, daremo all' integrale completo la forma $y - f(x, a) = 0$. L' integrale poi di $P = 0$ ci somministrerà per a il cercato valor variabile, ma ancora questo conterrà una costante arbitraria, e quindi anche la soluzione particolare si troverà fornita di una costante arbitraria, come lo era l' integrale completo, da cui è stata ricavata.

L' equazione $P = 0$ potrebbe egualmente esser suscettibile di una soluzione particolare, ma per ora io supporrò che ciò non sia, e che quindi la $P = 0$ abbia solo un integrale completo.

§ 73. Sia dunque $a = \Psi(x, c)$ quest' integrale: e la ricercata soluzione particolare sarà

(S) . . . . $\phi\{x, y, \Psi(x, c)\} = 0$.

Noi adunque, per soddisfare all' equazione colle differenze $F(x, y, \Delta y) = 0$, abbiamo due equazioni

(I) . . . . $\Psi(x, y, a) = 0$,

(S) . . . . $\phi\{x, y, \Psi(x, c)\} = 0$,

ambedue fornite di una costante arbitraria, e tali

che la seconda è stata dedotta dalla prima col far variare la costante a che vi si trova.

Ora può dimandarsi se per mezzo della variazione del c, si potrà dedurre dalla seconda equazione (S), operando sopra di essa come fatto abbiamo sulla (I), una terza equazione fornita di costante che soddisfaccia all' equazione colle differenze, e se da questa terza si potrà dedurre una quarta che abbia lo stesso pregio, e dalla quarta una quinta, e così via discorrendo, di modo che si trovino tante equazioni fornite di costanti, che soddisfacciano alla proposta, finchè si giunga ad una che non ammetta soluzione particolare. Prima di fare una tale indagine, io mi tratterrò ad esporre un esempio, onde serva di schiarimento a queste dottrine.

§ 74. L' equazione colle differenze $y = x\Delta y - \overline{\Delta y}^2$ ha per integrale completo $y = ax - a^2$. Per ottenerne la soluzione particolare converrà ricavare il valore di a da quest' equazione colle differenze
$x + 1 - 2a - \Delta a = 0$, ovvero (scrivendo a_x per a)
$a_{x+1} + a_x = x + 1$

L' integrale di quest' equazione è

$a_x = C(-1)^x + \frac{2x+1}{4}$ indicando con C la nuova costante arbitraria. Se ora si sostituisce nell' integrale completo un tal valore di a, avremo la soluzione particolare della proposta, e sarà

$$y = C(-1)^x \cdot x + \frac{x(2x+1)}{4} - \left\{ C(-1)^x + \frac{2x+1}{4} \right\}^2,$$

ove trovasi la costante arbitraria C.

Questa soluzione particolare si può anche ridurre più semplice, e diviene

$$y = -\frac{C(-1)^x}{2} - C^2 + \frac{(2x+1)(2x-1)}{16}.$$

Da una tale soluzione si possono ricavare infinite altre coll'assegnare alla costante C valori particolari, ma costanti; così facendo $C=0$, si ottiene

$$y=\frac{4x^2-1}{16}.$$

§ 75. Considerata la soluzione particolare dell'esempio precedente come se fosse un integrale completo, vediamo se essa ci somministra un' altra soluzione particolare. Prendendo la costante C per variabile, l'equazione, col mezzo della quale dovremo determinarlo, sarà

$$2C+\Delta C=\frac{(-1)^{x+1}}{2}, \text{ ovvero}$$

$$C_{x+1}+C_x=\frac{(-1)^{x+1}}{2}, \text{ e quindi}$$

$$C_x=\frac{(-1)^x(A+x)}{2},$$ essendo A una nuova costante arbitraria.

Questo valore di C sostituito nella già trovata soluzione particolare ci darà

$$y_x=-\frac{A+x}{4}-\frac{(A+x)^2}{4}+\frac{4x^2-1}{16};$$

e sarebbe questa una terza equazione che soddisfarebbe alla differenziale $y=x\Delta y-\overline{\Delta y}^2$: è facile però a vedersi che questa ultima soluzione particolare è lo stesso integrale completo: di fatto essa si riduce così

$$y=-\frac{A+x+A^2+2Ax+x^2}{4}+\frac{4x^2-1}{16}.$$

$$y=-\frac{4A+4A^2+2Ax+4x+1}{16},$$

$y = -\frac{1+2A}{4}x - \left(\frac{1+2A}{4}\right)^2$, e mutando la forma della costante arbitraria, $y = Ex - E^2$, ove la costante E tiene il posto della costante a dell' integrale.

Dall' integrale completo adunque per mezzo della variazione della costante ne abbiamo ritrovata la soluzione particolare, e da questa qui facendo egualmente variare la costante, è di nuovo tornato l' integrale medesimo; così delle due equazioni

$$y = ax - a^2$$

$$y = -\frac{C(-1)^x}{x} - C^2 + \frac{(2x+1)(2x-1)}{16}$$, si può

prendere la prima per integrale completo, ed allora la seconda è la soluzione particolare, la quale da esso si deduce; o *vice versa* prendere quest' ultima per integrale completo, e la prima diventa la soluzione particolare.

Si concluderà poi che due sole equazioni fornite di costante arbitraria soddisfanno all' equazione $y = x\Delta y - \overline{\Delta y}^2$, e che non si può ottenerne altre.

§ 76. Quanto avviene nel caso qui trattato, si verifica eziandio in qualunque equazione colle differenze, ed in questa guisa si risponde alla dimanda del § 2.

Le due equazioni

(I) . . . . $\phi(x, y, a) = 0$,

(S) . . . . $\phi\{x, y, \psi(x, c)\} = 0$,

possono egualmente considerarsi come integrali completi della equazione colle differenze

(D) . . . . . $F(x, y, \Delta y) = 0$,

giacchè ambedue contengono una costante arbitraria, e ad essa soddisfanno. Considerate poi l' una relativamente all' altra, si può dimostrare che *presane una per integrale completo, l' altra diventa la soluzione particolare*, e vice versa.

In fatti se nell' equazione (S), presa per integrale completo, si sostituisce in vece della costante una quantità variabile e tale, che i termini introdotti dalla di lei variazione si annullino da sè medesimi (pel che essa continuerà a soddisfare all' equazione colle differenze), diverrà allora questa equazione (S) una soluzione particolare; ma l' equazione (S) può sempre ridursi alla (I) sostituendo in vece della costante arbitraria una opportuna funzione dell' x: dunque soddisfacendo (I) all' equazione colle differenze, egualmente che la (S), ne segue che quest'ultima funzione da sostituirsi in (S), in vece della costante, sarà appunto quella che renderà la (I) una soluzione particolare; *dunque la (I) sarà una soluzione particolare che si deduce dalla (S), come questa si deduceva dalla medesima (I).*

§ 77. Questo importante teorema si può anche dimostrare in altra guisa.

L' equazione per mezzo della quale si determina il valore di a, onde da (I) si ricavi (S), è

$\phi(x+1, y+\Delta y, a+\Delta a) - \phi(x+1, y+\Delta y, a) = 0$

ovvero $\Delta a \cdot P = 0$.

L'equazione colle differenze $P=0$ ci dia $a=\psi(x,c)$, e la soluzione particolare sarà $\phi\{x, y, \psi(x, c)\}=0$.

$\psi(x, c)$ sarà tale che, facendo aumentare x della unità, e considerando c costante come è, l'equazione

$\phi\left(x+1, y+\Delta y, \psi(x+1, c)\right)=0$ diviene

$\phi\{x+1, y+\Delta y, \psi(x, c)\}=0$, come se ψ fosse stato eguale ad una costante.

Ora consideriamo questa equazione

$\phi\{x, y, \psi(x, c)\}=0$ come un integrale completo, e col mezzo di esso cerchiamone la soluzione particolare. Si avrà allora (supponendo che la costante c divenga una funzione variabile da determinarsi)

$\phi(x+1, y+\Delta y, \psi+\Delta\psi) - \phi(x+1, y+\Delta y, \psi)=0$,

ovvero $\Delta\psi \cdot P'=0$, ove P' è fatto di ψ e di $\Delta\psi$, come P era di a e di Δa.

Quest' equazione si decompone nelle due $\Delta\psi = 0$, $P' = 0$; la seconda torna a darci per ψ lo stesso valore che sopra ricavammo dalla $P = 0$ per a, e quindi si ritorna alla stessa equazione dalla quale siamo partiti, cioè $\phi\{x, y, \psi(x, c)\} = 0$. La prima ci dà $\psi = A$ costante arbitraria, e si ritorna all' integrale completo $\phi(x, y, A) = 0$, il quale in conseguenza nasce, come soluzione particolare, da quella soluzione che si ricavò da lui.

§ 78. Con un altro esempio possiamo verificare tutto questo. Sia da integrarsi l' equazione $y = x\Delta y + \sqrt{\Delta y}$.

L' integrale completo di quest' equazione è $y = a^2 x + a$. Per averne la soluzione particolare supporremo a variabile, e dovremo determinarla per mezzo di questa equazione

$$2a + \Delta a = -\frac{1}{x+1}, \text{ ovvero}$$

$$a_{x+1} + a_x = -\frac{1}{x+1}; \text{ Si ricava di qui}$$

$$a_x = (-1)^x \left(C + \Sigma \frac{(-1)^x}{x+1}\right). \text{ La soluzione parti-}$$

colare adunque sarà, facendo $\frac{(-1)^x}{x+1} = m_x$,

$$y = \left(C^2 + 2C\Sigma m_x + \overline{\Sigma m}^2_x\right) x + (-1)^x \left(C + \Sigma m_x\right).$$

Presa ora questa equazione per integrale completo, se ne cerchi la soluzione particolare, e si avrà per determinare C, l' equazione alle differenze

$$(2C + \Delta C)(x+1) + 2(x+1)\Sigma m_x$$

$$+ \frac{2(x+1)(-1)^x}{x+1} - (-1)^x = 0,$$

$$(2C + \Delta C)(x+1) + 2(x+1)\Sigma m_x + (-1)^x = 0,$$

$(2C + \Delta C) = - 2\Sigma m_x - m_x$,

$C_{x+1} + C_x = - \Sigma m_x - \Sigma m_{x+1}$, e quindi

$C_x = - \Sigma m_x + A(-1)^x$,

essendo A un' altra costante arbitraria.

Se questo valore di C si sostituirà nella già trovata soluzione particolare, avremo $y = A^2 x + A$, che è lo stesso integrale completo.

§ 79. Nel ricavare dall' integrale completo $\phi(x, y, a) = 0$ la soluzione particolare, noi abbiamo supposto (§ 72) che l' equazione $P = 0$, la quale ci dà il valore di a, fosse suscettibile soltanto dell' integrale completo. Supponiamo il caso che essa possa avere anche una soluzione particolare. Rappresentiamo l' equazione $P = 0$ con $f(x, a, \Delta a) = 0$ ed il suo integrale completo con $f'(x, a, c) = 0$ essendo c la costante arbitraria. Ad avere la soluzione particolare conviene trovare quella funzione dell' x da sostituirsi in vece del c, e questa funzione dipenderà dall' integrazione di una equazione colle differenze finite $(C')\ldots\ldots L(x, c, \Delta c) = 0$.

Quest' ultima equazione non abbia soluzione particolare, e sia il suo integrale completo $L'(x, c, b) = 0$, essendo b una nuova costante arbitraria. Ricaviamo da quest' ultima equazione il valore di c, e sia $c = \Gamma(x, b)$: avremo allora

$f'(x, a, c) = 0, \qquad f'\{x, a, \Gamma(x, b)\} = 0$,

che saranno le due equazioni fornite di una costante arbitraria, le quali soddisfanno all' equazione colle differenze $f(x, a, \Delta a) = 0$. Da quelle due equazioni ricaveremo adunque due valori di a, il primo dei quali lo abbiamo indicato con $\psi(x, c)$, ed il secondo indichiamolo con $\psi'(x, b)$.

Quest' ultimo valore sostituito nell' integrale completo $\phi(x, y, a) = 0$ ci darà un' altra soluzione particolare $\phi\{x, y, \psi'(x, b)\} = 0$; e così per soddisfare all' equazione colle differenze $F(x, y, \Delta y) = 0$, avremo queste tre equazioni

$\phi(x, y, a) = 0$,

$\phi\{(x, y, \psi(x, c)\} = 0$,

$\phi\{x, y, \psi'(x, b)\} = 0$.

Se l'equazione colle differenze (C') ammettesse ancora essa una soluzione particolare, allora si avrebbero due valori variabili per C, quindi tre valori variabili per a, ed in conseguenza quattro equazioni fornite di costante arbitraria, ciascuna delle quali può essere risguardata come l'integrale completo della proposta $F(x, y, \Delta y) = 0$.

Da ciascuno poi di questi quattro integrali si possono ricavare tutti gli altri col mezzo della variazione delle costanti.

Nella medesima guisa si dichiarerà quando una equazione colle differenze del primo ordine può avere cinque integrali completi, e così via discorrendo.

L'equazioni prese per esempj aver non potevano che due sole equazioni fornite di costanti, le quali soddisfacessero all'equazione differenziale.

§ 80. Veniamo a parlare dell'equazioni colle differenze del secondo ordine e dei superiori.

Sia l'equazione $F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0$, ed $(a) \ldots y = \phi(x, a, b)$ sia il suo integrale completo. Se noi prendiamo la differenza prima e la seconda, si avrà

$(b) \ldots \Delta y = \phi(x+1, a, b) - \phi(x, a, b)$;

$(c) \ldots \Delta^2 y = \phi(x+2, a, b) - 2\phi(x+1, a, b) + \phi(x, a, b)$;

le quali per semplicità scrivo così

$(b) \ldots \Delta y = \phi'(x, a, b)$,

$(c) \ldots \Delta^2 y = \phi''(x, a, b)$,

e l'equazione colle differenze risulterà dall'eliminazione delle due costanti a, b col mezzo delle tre equazioni (a), (b), (c).

Se poi col mezzo delle due equazioni (a), (b) si elimina a ovvero b, avremo due equazioni colle differenze del primo ordine

$P(x, y, \Delta y, a) = 0$, $\quad Q(x, y, \Delta y, b) = 0$,

cui si suole dare il nome d'integrali primi completi. Si avverta, a scanso d'equivoco, che $P(x, y, \Delta y, a)$ significa qui una funzione delle quantità poste tra le parentesi: lo stesso dicasi di $Q(x, y, \Delta y, b)$. Dall' eliminazione poi di Δy tra i due integrali primi risulta l'integrale completo.

Ora supponiamo che le due costanti a, b divengano variabili, e determiniamole per modo che i termini portati dalla variabilità loro si annullino da sè medesimi. In questa ipotesi

$$\Delta y = \phi(x+1, a+\Delta a, b+\Delta b) - \phi(x, a, b)$$
$$= \phi(x+1, a, b) - \phi(x, a, b) + f(x, a, \Delta a, b, \Delta b),$$

e dovendo annullarsi i termini introdotti dalla variazione dell'a e del b si avrà

$$(1) \ldots\ldots f(x, a, \Delta a, b, \Delta b) = 0.$$

In tal guisa il valore di Δy sarà lo stesso come se a, b fossero state costanti.

Prendiamo ora la differenza della trovata differenza prima Δy, e si avrà

$$\Delta^2 y = \phi'(x+1, a+\Delta a, b+\Delta b) - \phi'(x, a, b)$$
$$= \phi'(x+1, a, b) - \phi'(x, a, b) + f'(x, a, \Delta a, b, \Delta b).$$

Onde poi la variazione delle a, b non alteri il valore di $\Delta^2 y$, dovrà essere

$$(2) \ldots\ldots f'(x, a, \Delta a, b, \Delta b) = 0.$$

Alle equazioni (1), (2) noi possiamo dare queste forme

$$(1) \ldots\ldots \Delta a \cdot V + \Delta b \cdot W = 0,$$
$$(2) \ldots\ldots \Delta a \cdot V' + \Delta b \cdot W' = 0;$$

nelle quali V, W, V', W' sono funzioni di x, a, Δa, b, Δb.

§ 81. Determinati i valori dell'a, e del b col mezzo di queste due equazioni, si avrà (indicando con a_x, b_x questi valori)

$$(a) \ldots\ldots y = \phi(x, a_x, b_x);$$

e questa sarà la soluzione particolare della equazione proposta, imperciocchè avendo le funzioni a_x, b_x la proprietà d' introdurre nelle differenze termini che da sè stessi si distruggono, si ha egualmente

(b) . . . . $\Delta y = \phi'(x, a_x, b_x)$,

(c) . . . . $\Delta^2 y = \phi''(x, a_x, b_x)$,

e quindi con l' eliminazione di a_x, b_x, per mezzo delle tre equazioni (a), (b), (c), si ha la stessa equazione alle differenze finite $F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0$. Soddisfarà dunque a questa equazione

$y = \phi(x, a_x, b_x)$, il qual valore dell'y non risulta da qualunque valore particolare che si dia alle costanti a, b, dell' integrale completo $y = \phi(x, a, b)$; e perciò si chiama ancora esso *soluzione particolare.*

I due integrali primi

$P(x, y, \Delta y, a) = 0$, $Q(x, y \Delta y, b) = 0$

indicati al § antecedente, divengono per le stesse ragioni due soluzioni particolari, quando si pongano in esse, in vece di a, b, le ritrovate funzioni a_x, b_x. Saranno adunque queste due soluzioni particolari

(3) . . . . $P(x, y, \Delta y, a_x) = 0$,

(4) . . . . $Q(x, y, \Delta y, b_x) = 0$.

Anzi rispetto a queste soluzioni particolari si può dimostrare che sono in sostanza una sola, non differendo le due equazioni che nella forma.

In fatti ad avere la soluzione particolare (3) bisogna incominciare da eliminare b tra le due equazioni

$y = \phi(x, a,), b$ $\Delta y = \phi'(x, a, b)$,

e quindi dal risultamento $P(x, y\ \Delta y, a) = 0$ eliminare a col mezzo delle altre due equazioni (1), (2); di modo che quella soluzione particolare è il risultamento della eliminazione delle a, b col mezzo delle quattro equazioni (a), (b), (1), (2).

Se eliminiamo poi la costante a col mezzo delle su indicate equazioni (a), (b), e dal risultamento $Q(x, y, \Delta y, b) = 0$ si elimina b con l' ajuto delle due altre equazioni (1), (2), si avrà l' altra soluzione (4); anche questa pertanto sarà il risultamento della eliminazione delle a, b mercè le stesse quattro (a), (b), (1), (2): dunque le due soluzioni particolari si ridurranno ad una sola.

§ 82. Al § 80 abbiamo detto che una equazione del secondo ordine colle differenze ha (giusta la comune maniera di considerare gl' integrali) due integrali completi del primo ordine, e questi abbiamo rappresentati con

$$\begin{matrix} P(x, y, \Delta y, a) = 0, \\ Q(x, y, \Delta y, b) = 0, \end{matrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{matrix} P = 0, \\ Q = 0. \end{matrix}$$

Ora io osservo che questi due integrali possono risguardarsi, uno come la soluzione particolare ricavata dall' altro col far variabile la costante che in questo si trova. In fatti si osserverà qui come al § 76, che si può sempre prendere per a una tale funzione dell' $x, y, \Delta y$, che renda $P = Q$, di modo che, indicando con M questo valore, sia

$$P(x, y, \Delta y, M) = Q(x, y, \Delta y, b).$$

Ora questo valore dell' a non essendo una quantità costante, non può darci un integrale particolare, ma ci darà una soluzione particolare; di fatto sostituito esso in $P = 0$ continuerà quest' equazione a soddisfare alla proposta equazione colle differenze, giacchè allora $P = Q$.

Da sì fatta osservazione si ricava anche un'altra dimostrazione del teorema dimostrato al § 81, cioè

Se dall' integrale primo completo $P = 0$ si ricava la soluzione particolare del primo ordine, e sia $R = 0$,

se una simile soluzione particolare si ricava anco dall' altro integrale primo $Q = 0$, e sia $S = 0$, queste due soluzioni saranno la stessa cosa.

Supponiamo in fatti che la costante a dell' integrale primo sia variabile, e che la x cresca della sua differenza finita 1, e si avrà

$$P(x+1, y+\Delta y, \Delta y+\Delta^2 y, a+\Delta a) = 0,$$

cui si può dare la forma

$$P(x+1, y+\Delta y, \Delta y+\Delta^2 y, a) + \Delta a \cdot V = 0,$$

indicando con $\Delta a \cdot V$ la somma dei termini portati dall'a. Se si fa $V = 0$, o per dinotare che V contiene a, $V(a) = 0$, sarà questa l' equazione che determinar debbe a, e la soluzione particolare $R = 0$ sarà il risultamento della eliminazione di a tra le due equazioni $P = 0$, $V(a) = 0$.

Lo stesso si dica per la soluzione particolare $S = 0$, che ricavar si debbe da $Q = 0$. Sarà essa il risultamento della eliminazione del b tra $Q = 0$, ed un' altra equazione $V' = 0$, ovvero $V'(b) = 0$.

Ora poniamo in $P(x, y, \Delta y, a=0)$ in iscambio dell'a quel valore M, il quale rende $P(x, y, \Delta y, M) = Q(x, y, \Delta y, b)$: è manifesto che in quest' ipotesi avremo lo stesso risultamento eliminando b tra $Q = 0$, $V'(b) = 0$, che si avrà eliminando M tra $P(x, y, \Delta y, M) = 0$, $V(M) = 0$, giacchè il b è solo contenuto in M; ma quest' ultimo risultamento è lo stesso che quello dell' eliminazione dell' a tra $P(x, y, \Delta y, a) = 0$, $V(a) = 0$; dunque il risultamento dell' eliminazione dell' a tra queste due ultime equazioni, cioè la soluzione particolare la quale ci è data da $P = 0$, sarà lo stesso che quello dell' eliminazione del b tra $Q = 0$, $V'(b) = 0$, esso, cioè, sarà l' altra soluzione particolare del primo ordine dataci da $Q = 0$.

§ 83. Riprendiamo le due equazioni del § 9,

(1) . . . . . $\Delta a \cdot V + \Delta b \cdot W = 0$,

(2) . . . . . $\Delta a \cdot V' + \Delta b \cdot W'$ o,

le quali ci debbono dare i valori dell' a, b fatti colla x, da sostituirsi nell' integrale completo $y = \phi(x, a, b)$, onde ottengasi la soluzione particolare che vi corrisponde, e da sostituirsi in uno degl' integrali primi completi

$$P(x, y, \Delta y, a) = 0, \qquad Q(x, y, \Delta y, b) = 0,$$

onde abbiasi la soluzione particolare prima.

Primieramente osservo che facendo $\Delta a = 0$, $\Delta b = 0$, le due equazioni sono soddisfatte, e per a, b si hanno due costanti, e quindi s' incontrano gli stessi integrali completi donde siamo partiti. Non facendo adunque queste supposizioni, considero che le due equazioni (1), (2) sono colle differenze finite del primo ordine tra due funzioni variabili incognite a_x, b_x, e che perciò il valore di queste funzioni dipenderà dall' integrazione di una equazione colle differenze finite del secondo ordine. Supponiamo che quest' equazione non ammetta soluzioni particolari, ma soltanto un integrale completo. Questo integrale completo conterrà due nuove costanti arbitrarie; quindi i valori delle funzioni a_x, b_x conterranno ancora essi queste due costanti. Sia pertanto $a_x = \psi(x, c, e)$, $b_x = \psi'(x, c, e)$ essendo e, c quelle costanti, e $y = \phi(x, \psi, \psi')$ sarà la soluzione particolare corrispondente all' integrale completo, e $P(x, y, \Delta y, \psi) = 0$, ovvero $Q(x, y, \Delta y, \psi') = 0$ la soluzione particolare del primo ordine.

Così la soluzione particolare corrispondente all' integrale completo, contiene, come esso, due costanti arbitrarie; e due costanti pure arbitrarie contiene anche la soluzione particolare prima, a differenza degl' integrali primi, i quali non ne contengono che una sola per ciascuno.

§ 84. Prendiamo a farne un esempio. L' equazione $y = ax + \frac{bx^2}{2} + a^2 + b^2$ rappresenti un integrale completo, e sarà

$\Delta y = a + \frac{b\,(2x+1)}{2}$, $\Delta^2 y = b$, quindi sarà

$$y = x\Delta y - \frac{x^2\Delta^2 y}{2} - \frac{x\Delta^2 y}{2} + \overline{\Delta y}^2 - \Delta y \cdot \Delta^2 y \cdot (2x+1)$$
$$+ x^2\overline{\Delta^2 y}^2 + x\overline{\Delta^2 y}^2 + \frac{5\overline{\Delta^2 y}^2}{4}$$ l'equazione colle differenze del secondo ordine che appartiene a quell' integrale.

I due di lei integrali primi saranno

$$y = x\left(\Delta y - \frac{b\,(2x+1)}{2}\right) + \frac{bx^2}{2} + b^2 + \left(\Delta y - \frac{b\,(2x+1)}{2}\right)^2,$$
$$y = ax + \frac{x^2}{2}\left\{\frac{2\Delta y - 2a}{2x+1}\right\} + \left\{\frac{2\Delta y - 2a}{2x+1}\right\}^2 + a^2.$$

Ora per avere le soluzioni particolari si risguardino a, b come variabili, e le equazioni (1), (2), diverranno

$$(1) \ldots \Delta a\,(x+1) + \frac{\Delta b\,(x+1)^2}{2} + 2a\Delta a + \overline{\Delta a}^2$$
$$+ 2b\Delta b + \Delta b^2 = 0,$$
$$(2) \ldots \Delta a + \frac{\Delta b\,(2x+3)}{2} = 0;$$

così otterremo la soluzione particolare corrispondente all' integrale completo, sostituendo in esso, in vece di a, b i loro valori dati dalle equazioni (1), (2).

Sostituendo nell' equazione (1) il valore di Δa dato dall' equazione (2), e dividendo per Δb, si ha

$$-\frac{(2x+3)\,(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2a\,(2x+3)}{2}$$
$$+ \frac{\Delta b\,(2x+3)^2}{4} + 2b + \Delta b = 0,$$ ovvero

$$(3) \ldots - \frac{(x+1)\,(x+2)}{2} - (2x+3)\,a$$
$$+ \frac{(2x+3)^2}{4}\Delta b + 2b + \Delta b = 0.$$

In questa equazione facciamo aumentare x dell' unità ed avremo

$$-\frac{(x+2)(x+3)}{2}-(2x+5)(a+\Delta a)$$
$$+\frac{(2x+5)^2}{4}(\Delta b+\Delta^2 b)+2(b+\Delta b)+\Delta b+\Delta^2 b=0,$$

nella quale, sostituendo in vece del Δa il valore datoci dalla equazione (2), si ha

$$(4)\ldots-\frac{(x+2)(x+3)}{2}-(2x+5)\,a$$
$$+\frac{(2x+5)(2x+3)}{2}\Delta b+\frac{(2x+5)^2}{4}(\Delta b+\Delta^2 b)$$
$$+2b+3\Delta b+\Delta^2 b=0.$$

Col mezzo delle due equazioni (3), (4) si può eliminare a, ed ottenere un' equazione colle differenze del secondo ordine, la quale abbia questa forma

$$M\Delta^2 b+N\Delta b+Lb+H=0,$$

essendo i coefficienti M, N, L, H tante funzioni date dell' x.

Ad una tale equazione si può dare anche la forma

$$(5)\ldots b_{x+2}+\alpha b_{x+1}+\beta b_x=X$$

essendo α, β, X funzioni cognite dell' x.

L' equazione (5) è integrabile completamente (43) e non ammette soluzione particolare.

Da questo integrale completo si ricaverà il valore di b_x, il quale sostituito nell' equazione (4) ci darà quello di a_x. Ciascuno di questi valori conterrà poi le due costanti arbitrarie, che porta l' integrazione dell' equazione (5).

Io non eseguisco tutti questi calcoli, perchè si complicano in tal guisa che a me non sembra che metta conto condurli a fine.

§ 85. Ritornando alle dottrine sviluppate nel § 12, io osservo che l'integrale completo $y = \phi(x, a, b)$ ci ha data la soluzione particolare

$y = \phi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$, la quale contenendo due costanti arbitrarie può essere presa per l'integrale completo della proposta. Considerando poi quest' ultima espressione dell'y quale integrale completo, si può dimostrare, come per l'equazioni del primo ordine, questo importantissimo ed elegante teorema *Che la soluzione particolare da esso somministrataci col mezzo della variazione delle costanti, è lo stesso primiero integrale completo, quando l'equazione alle differenze che determina le costanti* a, b *divenute variabili, non abbia soluzioni particolari.*

In fatti supponiamo che in

$$y = \phi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$$

le costanti c, e siano variabili, ed i termini che dovranno annullarsi in virtù delle variazioni di esse saranno

$$\Delta\psi \cdot V + \Delta\psi' \cdot W = 0, \qquad \Delta\psi \cdot V' + \Delta\psi' \cdot W' = 0,$$

ove V, V', W, W' sono fatti di ψ, ψ' come al § 83 erano dell' a, b.

Ora facendo $\Delta\psi = 0$, $\Delta\psi' = 0$, si trova $\psi = a$, $\psi = b$; quindi si ottiene per soluzione particolare $y = \phi(x, a, b)$. Se poi queste supposizioni non si fanno, allora per ψ, ψ' si ottengono gli stessi valori che si ebbero per a, b; quindi si ritrova la stessa equazione

$y = \phi\{x, \psi(x, c, e), \psi'(x, c, e)\}$, donde partimmo.

Così delle due equazioni

$$y = \phi(x, a, b)$$

$$y = \phi\{x, \psi(x, c, e), \psi(xc, e)\}$$

qualunque di esse si prenda per l'integrale completo, l'altra ne diventa la soluzione particolare, o deriva dalla prima facendo variare le costanti.

Quando l' equazione risultante da quelle due (1), (2) del citato § ammettesse soluzione particolare, allora *si potrebbe ottenere un' altra soluzione particolare della proposta equazione, completata anche questa con due costanti arbitrarie, a motivo delle quali essa ancora potrebbe prendersi come fosse integrale completo.* In somma si possono qui dimostrare proprietà simili a quelle che abbiamo dimostrate ai §§ 76, 77 e 79 per gl' integrali dell' equazioni colle differenze del primo ordine.

CAPO XI.

Integrazione dell' equazioni colle differenze finite e parziali dei primi ordini.

§ 86. All' equazioni colle differenze parziali si dà il nome d' equazioni lineari, quando le funzioni $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$ ecc. non formanò in ciascun termine che una sola dimensione. Tale è nel primo ordine l' equazione

$$(1) \quad \ldots \quad az_{x,y} + bz_{x+1,y} - z_{x,y+1} = 0$$

che io prendo ad integrare, quando i coefficienti a, b siano costanti. Io premetto che per integrale intender si debbe un certo valore di $z_{x,y}$, il quale sostituito nell' equazione colle differenze la renda identica. Questo valore può contenere costanti arbitrarie, ed anco una funzione arbitraria; conviene però che le costanti e la funzione siano tali, che per mezzo delle differenze finite eliminar si possano da quel valore, risultandone dopo l' eliminazione la stessa equazione colle differenze. Allora quando l' integrale contiene una funzione arbitraria; sogliono i geometri chiamarlo *completo*, e negli altri casi lo chiamano particolare.

Ciò premesso, onde aver l'integrale dell'equazione (1), facciasi $z_{x,y} = C\alpha^x \beta^y$, rappresentando con C, α, β tre costanti, che dovranno determinarsi per modo che il valore supposto soddisfaccia all'equazione.

Ora essendo $z_{x+1,y} = C\alpha^x \beta^y \cdot \alpha$; $z_{x,y+1} = C\alpha^x \beta^y \cdot \beta$, se si faranno le opportune sostituzioni nell'equazione proposta, e dopo ella si dividerà tutta pel fattor comune $C\alpha^x \beta^y$, otterremo l'equazione $a + b\alpha - \beta = 0$, la quale servirà a determinare α con β ovvero β con α.

Preso il valore dell'β, si ha $\beta = a + b\alpha$, e quindi $z_{x,y} = C\alpha^x (a + b\alpha)^y$, ove si vede che due di quelle tre costanti restano arbitrarie.

Sviluppiamo il valore di $z_{x,y}$ col mezzo del binomio di Newton, e si avrà

$$z_{x,y} = Ca^y \alpha^x + y a^{y-1} b C\alpha^{x+1} + \frac{y(y-1)}{2} a^{y-2} b^2 C\alpha^{x+2} + \ldots + b^y C\alpha^{x+y};$$

e questo valore sostituito nell'equazione (1) la renderà identica: dunque i coefficienti delle simili potenze dell'α si annulleranno da sè medesimi. Ora se in vece di $C\alpha^x$ si pone una qualunque funzione $\phi(x)$ dell'x, onde abbiasi

$$z_{x,y} = a^y \phi(x) + y a^{y-1} b \phi(x+1) + \frac{y(y+1)}{2} a^{y-2} b^2 \phi(x+2) + \ldots + b^y \phi(x+y)$$

dico che anco tal valore di $z_{x,y}$ soddisfà all'equazione (1): in fatti sostituito in essa, ove erano le

simili potenze dell' a, vi saranno ora le simili funzioni dell'x, ove, cioè, erano le potenze a^{x+m}, saranno le funzioni $\phi(x+m)$; dunque siccome si annullavano da sè stessi i coefficienti di quelle potenze, si annulleranno anche i coefficienti di queste funzioni, e l' equazione (1) resterà soddisfatta.

Quest' ultimo valore di $z_{x,y}$ sarà dunque l' integrale completo della proposta.

Per determinare poi la funzione arbitraria che trovasi nell' integrale, io osservo che $y=0$ dà $z_{x,0}=\phi(x)$. Dunque la funzione arbitraria si determina per mezzo del valore di $z_{x,y}$ quando $y=0$, il quale perciò dovrà esser dato mercè le condizioni del problema. Sarà dunque

$$z_{x,y}=a^y z_{x,0}+ya^{y-1}bz_{x+1,0}$$
$$+\frac{y(y-1)}{2}a^{y-2}.b^2z_{x+2,0}+\ldots+b^yz_{x+y,0}.$$

Se in vece di determinare β coll' a, avessimo determinato a col β, avremmo avuto $a=b^{-1}(\beta-a)$; quindi

$$z_{x,y}=C\beta^y a^x=C\beta^y b^{-x}(\beta-a)^x$$
$$=b^{-x}\Big\{C\beta^{y+x}-xCa\beta^{y+x-1}$$
$$+\frac{x(x-1)}{2}Ca^2\beta^{y+x-2}-\ldots\pm Ca\beta^x.\beta^y\Big\},$$

e per ciò che è detto qui sopra,

$$z_{x,y}=b^{-x}\Big\{\Psi(x+y)-xa\Psi(x+y-1)$$
$$+\frac{x(x-1)}{2}a^2\Psi(x+y-2)-\ldots\pm a^x\Psi(y)\Big\},$$

indicando con $\Psi(y)$ un' altra funzione arbitraria dell' y.

La detta funzione $\Psi(y)$ si determina per mezzo del valore di $z_{x,y}$ quando $x = 0$; abbiamo dunque $\Psi(y) = z_{0,y}$ e perciò

$$z_{x,y} = b^{-x}\left\{ z_{0,x+y} - xaz_{0,x+y-1} + \frac{x(x-1)}{2}a^2 z_{0,x+y-2} - \dots \pm a^x z_{0,y} \right\}.$$

§ 87. Mostriamo l' uso dell' integrazione dell' equazioni colle differenze finite e parziali nella teorica serie.

Se in una funzione $z_{x,y}$ di due variabili x, y supponiamo una di esse variabili, per esempio $y = 0$, e facciamo $x = 0, 1, 2, 3$ ecc., avremo questa serie di quantità $z_{0,0}, z_{1,0}, z_{2,0}$ ecc. Parimente se, supponendo $y = 1$, si fa $x = 0, 1, 2, 3$ ecc. troveremo un' altra serie di queste quantità $z_{0,1}$, $z_{1,1}, z_{2,1}$ ecc., e così di mano in mano. Si dispongano tutte queste serie nel modo seguente:

Indici orizzontali.

Indici verticali.	0,	1,	2,	3,	....., x,	$x+1$	ecc.
0	$z_{0,0}$,	$z_{1,0}$,	$z_{2,0}$,	$z_{3,0}$,	.... $z_{x,0}$,	$z_{x+1,0}$,	ecc.
1	$z_{0,1}$,	$z_{1,1}$,	$z_{2,1}$,	$z_{3,1}$,	.... $z_{x,1}$,	$z_{x+1,1}$,	ecc.
2	$z_{0,2}$,	$z_{1,2}$,	$z_{2,2}$,	$z_{3,2}$,	.... $z_{x,2}$,	$z_{x+1,2}$,	ecc.
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
y	$z_{0,y}$,	$z_{1,y}$,	$z_{2,y}$,	$z_{3,y}$,	.... $z_{x,y}$,	$z_{x+1,y}$,	ecc.
$y+1$	$z_{0,y+1}$,	.....	.....	.....	.....	.....	.....
ecc.							

In questa tavola ciascun termine, per esempio, $z_{3,2}$ è una funzione dei suoi indici 3, 2, in quel modo appunto che $z_{x,y}$ è una funzione degl'indici x e y. Se pertanto fosse conosciuto il valore di $z_{x,y}$, è chiaro che potrebbero aversi tutt'i termini di quella tavola, facendo x e y eguali agl' indici che appartengono ai termini cercati.

Quando però, non conoscendosi il valore di $z_{x,y}$, è conosciuta la legge con la quale i termini di quella tavola sono ricavati gli uni dagli altri, e si cerca il valore di $z_{x,y}$ (che chiamasi il termine generale di quella tavola), conviene allora ricorrere al calcolo integrale delle differenze finite e parziali.

Se la legge con la quale sono formati i termini, è tale che uno qualunque $z_{x,y}$ dipenda da alcuni degli altri termini che lo precedono o che lo seguono, tanto nelle file orizzontali quanto nelle verticali, la tavola rappresenta allora la formola generale di quelle serie che si chiamano *doppie* e anche *recurro-recurrenti.*

È dunque evidente che esprimendo questa dipendenza con una equazione fra il termine $z_{x,y}$ e gli altri, tale equazione avrà le differenze finite e parziali; e dall' integrazione di questa dipenderà il valore del termine generale $z_{x,y}$. Quando questa equazione è lineare, allora è compresa nella classe di quelle che trattiamo. Ponendo adesso mente a quel che abbiamo detto al § antecedente, vedremo che la determinazione delle funzioni arbitrarie dipende dai valori particolari di $z_{x,y}$ allora che una variabile ha dei valori determinati, dipende, cioè, dai valori di alcune file di termini della serie *recurro-recurrente*; e perciò queste file dovranno essere date.

§ 88. Prendiamo, per esempio, la seguente serie *recurro-recurrente*,

	0	1	2	3	4 x
0	0	2	4	6	8 . . . . $2x$
1	2	8	14	20	26 . . . .
2	12	30	48	66	84 . . . .
3	54	108	162	216	
4	216	378	540		
y	. . . .				

nella quale un termine qualunque $z_{x,y}$ è eguale al doppio del suo termine superiore $z_{x,y-1}$, più il termine $z_{x+1,y-1}$ che segue questo superiore medesimo.

Ponendo una tal condizione in equazione, avremo $z_{x,y} = 2z_{x,y-1} + z_{x+1,y-1}$ equazione lineare colle differenze finite e parziali, dall' integrazione della quale dipende il valore del termine generale $z_{x,y}$. Se in questa equazione si fa crescere la y di una unità, e si pongono tutt' i termini in un sol membro, troveremo $2z_{x,y} + z_{x+1,y} - z_{x,y+1} = 0$. Questa equazione che è del primo ordine, paragonata con quella del § 86, ci dà $a = 2$, $b = 1$, onde avremo per $z_{x,y}$ queste due espressioni

$$z_{x,y} = 2^y \phi(x) + y \cdot 2^{y-1} \phi(x+1)$$
$$+ \frac{y(y-1)}{2} 2^{y-2} \phi(x+2) + \ldots + \phi(x+y),$$

$$z_{x,y} = \Psi(x+y) - x \cdot 2\Psi(x+y-1)$$
$$+ \frac{x(x-1)}{2} 2^2\Psi(x+y-2) - \ldots \pm 2^x \Psi(y);$$

e siccome $\phi(x)$ si trovò eguale a $z_{x,0}$, e $\Psi(y)$, a $z_{0,y}$, perciò sarà

$$z_{x,y} = 2^y z_{x,0} + y \cdot 2^{y-1} \cdot z_{x+1,0}$$
$$+ \frac{y(y-1)}{2} 2^{y-2} \cdot z_{x+2,0} + \ldots + z_{x+y,0};$$

ovvero

$$z_{x,y} = z_{0,x+y} - x \cdot 2z_{0,x+y-1}$$
$$+ \frac{x(x-1)}{2} \cdot 2^2 z_{0,x+y-2} - \ldots \pm 2^x z_{0,y}.$$

Servendosi adunque della prima formola, è necessario che siano dati i termini della prima fila orizzontale, e adoperando la seconda, quelli della prima fila verticale: anzi nei termini della prima fila orizzontale, essendo in generale $z_{x,0} = 2x$, la prima espressione di $z_{x,y}$ diverrà

$$z_{x,y} = 2^y \cdot 2x + y \cdot 2^{y-1} \cdot 2(x+1).$$
$$+ \frac{y(y-1)}{2} 2^{y-2} \cdot 2(x+2) + \ldots + 2(x+y).$$

Vogliasi, per esempio, il terzo termine della terza fila orizzontale, cioè $z_{3,3}$: facendo $x = 3, y = 3$, si ha $z_{3,3} = 2^3 \cdot 6 + 3 \cdot 2^2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 10 + 12$

$$= 48 + 96 + 60 + 12 = 216.$$

§ 89. Abbiasi da integrare l' equazione

$$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} = 0.$$

Facciamo come al § 86 $z_{x,y}=C'\alpha^x\beta^y$, o semplicemente $z_{x,y}=\alpha^x\beta^y$. Noi tralasciamo la costante, poichè essa comparisce sempre come semplice moltiplicatore che è destinato a svanire nell' introduzione della funzione.

Fatte le opportune sostituzioni nella proposta, avremo fra α e β quest' equazione

$A+B\alpha+B'\beta+C'\alpha\beta=0$, con la quale determiniamo β per α, e troveremo

$$\beta=-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha} \text{ e perciò } z_{x,y}=\alpha^x\beta^y=\alpha^x\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y.$$

Se adesso svolgiamo questa funzione in serie ordinata secondo le potenze decrescenti di α, s' avrà per $z_{x,y}$ una espressione di questa forma

$$z_{x,y}=T\alpha^{x+\mu y}+T'\alpha^{x+\mu y-1}+T''\alpha^{x+\mu y-2}+\text{ec.},$$

e per ciò che si è detto al § 86

$$z_{x,y}=T\phi(x+\mu y)+T'\phi(x+\mu y-1)$$
$$+T''\phi(x+\mu y-2)+\text{ecc.}$$

Questa serie non terminerà ogni qual volta la quantità $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y$ non potrà svilupparsi in serie composta di un numero finito di termini. La quantità però $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y$ ha questa qualità quando B' ovvero C' è zero. Ma per trovare l' integrale in termini finiti ancora quando B' ovvero C' non è nullo, adopereremo il metodo seguente.

§ 90. Facciamo nel valore di β la quantità $B'+C'\alpha$ eguale ad una nuova indeterminata $-\omega$, ed avremo

$\alpha = -\frac{\omega + B'}{C'}$. Sostituendo ora questo valore di α in quello di β, sarà

$$\beta = -\frac{B}{C'} + \left(A - \frac{BB'}{C'}\right)\frac{1}{\omega}$$: s' avrà dunque

$$\alpha = -\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right),$$

$$\beta = -\frac{B}{C'}\left\{1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right\},$$ e perciò

$$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y = \left\{-\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right)\right\}^x \times \left\{1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right\}^y \cdot \left(-\frac{B}{C'}\right)^y.$$

Ora i due fattori

$$\left\{-\frac{\omega}{C'}\left(1+\frac{B'}{\omega}\right)\right\}^x, \left\{1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right\}^y \cdot \left(-\frac{B}{C'}\right)^y$$

ridotti in serie secondo le potenze di ω danno due serie di questa forma

$$P\omega^x + P'\omega^{x-1} + P''\omega^{x-2} + \ldots + P^{(x)}$$

$q + q'\omega^{-1} + q''\omega^{-2} + q^{(y)}\omega^{-y}$, dalla moltiplicazione delle quali verrà anche per $z_{x,y}$ una espressione finita di questa forma

$$z_{x,y} = V\omega^x + V'\omega^{x-1} + V''\omega^{x-2} + \ldots + V^{(x)}\omega^0 + V^{(x+1)}\omega^{-1} + \ldots + V^{(x+y)}\omega^{-y};$$

la quale si cangerà (§ 86) in

$$z_{x,y} = V\phi(x) + V'\phi(x-1) + \ldots + V^{(x)}\phi(0) + V^{(x+1)}\phi(-1) + \ldots + V^{(x+y)}\Psi(-y),$$

indicando con $\phi(x)$ una funzione arbitraria di x.

Vedremo in seguito come può determinarsi questa funzione arbitraria.

L'espressione che abbiamo data per $z_{x,y}$ è sempre finita; per trovare poi i valori di V, V', V'' ec. è manifesto che basterà moltiplicare fra loro le due serie che esprimono i valori di α^x, β^y. Nel valore dell'α poniamo la quantità $-\frac{1}{C'}=m$, $B'=n$; e in quello di β, le quantità $-\frac{B}{C'}=p$, $B'-\frac{AC'}{B}=q$, avremo

$$\alpha^x=\left\{m\varpi\left(1+\frac{n}{\varpi}\right)\right\}^x$$

$$=m^x\left(\varpi^x+xn\varpi^{x-1}+\frac{x(x-1)}{2}n^2\varpi^{x-2}+\text{ecc.}\right)$$

$$\beta^y=\left\{p\left(1+\frac{q}{\varpi}\right)\right\}^y$$

$$=p^y\left(1+y\frac{q}{\varpi}+\frac{y(y-1)}{2}\cdot\frac{q^2}{\varpi^2}+\text{ecc.}\right),$$

la moltiplicazione delle quali serie darà

$$V=m^xp^y,$$

$$V'=m^xp^y(xn+yq),$$

$$V''=m^xp^y\left(\frac{x(x-1)}{2}n^2+xn\cdot yq+\frac{y(y-1)}{2}q^2\right),$$

$$V'''=m^xp^y\left(\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}n^3+\frac{x(x-1)}{2}n^2\cdot yq\right.$$
$$\left.+xn\cdot\frac{y(y-1)}{2}q^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot 3}q^3\right),$$

. . . .

$$V^{(s)}=m^xp^y\left(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-s+1)}{2\cdot 3\ldots\ldots s}n^s+\right.$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-s+2)}{2\cdot 2\dots(s-1)}n^{s-1}\cdot yq$$

$$+\frac{x\dots(x-s+3)}{2\cdot 3\dots(s-2)}n^{s-2}\cdot\frac{y(y-1)}{2}q^2+\dots\dots$$

$$+xn\cdot\frac{y(y-1)\dots(y-s+2)}{2\cdot 3\dots(s-1)}q^{s-1}$$

$$+\frac{y(y-1)\dots(y-s+1)}{2\cdot 3\dots s}q^s\Big).$$

Se $q=n$, ciò che accade quando $A=0$, questi valori dei coefficienti diverranno più semplici

$$V=m^xp^y,$$

$$V'=m^xp^y(x+y)n,$$

$$V''=m^xp^y.\frac{(x+y)(x+y-1)}{2}n^2,$$

$$V'''=m^xp^y.\frac{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}{2\cdot 3}n^3,\text{ ec.}$$

§ 91. Noi siamo adesso in situazione di poter direttamente dimostrare la formula generale per le combinazioni, trovata coll' induzione al § 32.

Si ricerchi in quante maniere può combinarsi un numero x di quantità prendendone un numero y per volta. Qui s' intende soltanto parlare delle combinazioni diverse.

Il ricercato numero di maniere sarà diverso, a misura che diverso sarà il numero delle quantità da combinarsi, ed il numero di quelle che debbono entrare in una combinazione: egli adunque dipenderà da questi due numeri x ed y; sarà in conseguenza una funzione dei medesimi.

Rappresentiamo con $z_{x,y}$ il numero cercato; sarà $z_{x+1,y}$ il detto numero di maniere quando

le quantità da combinarsi sono una di più. Ora questo secondo numero di combinazioni sarà eguale al primo $z_{x,y}$ aumentato di tutte le combinazioni che con x lettere possono farsi prendendone un numero $y-1$ per volta, poichè ognuna di queste combinazioni, aggiuntavi la nuova quantità, ci dà una combinazione nuova di un numero y di quantità. Si avrà dunque per risolvere il problema quest' equazione a differenze finite e parziali

$$z_{x+1,y}=z_{x,y}+z_{x,y-1};$$

e ponendo $y+1$ per y; a fine di ridurla alla forma di quella del § 89, si ha

$$z_{x+1,y+1}=z_{x,y+1}+z_{x,y}:$$

Fatto il paragone della nostra equazione con la citata, abbiamo $A=1$, $B=0$, $B'=1$, $C'=-1$, e quindi fra α e β questa equazione $\alpha\beta=\beta+1$.

Determinando α per β, sarà $\alpha^x=(1+\beta^{-1})^x$, e però

$$z_{x,y}=\alpha^x\beta^y=\beta^y(1+\beta^{-1})^x=\beta^y+x\beta^{y-1}$$
$$+\frac{x(x-1)}{2}\beta^{y-2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}\beta^{y-3}+\ldots$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x-m)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(m+1)}\beta^{y-m-1}+\text{ec.}$$

e quindi l'integrale completo di quell'equazione sarà

$$z_{x,y}=\phi(y)+x\phi(y-1)+\frac{x(x-1)}{2}\phi(y-2)+\ldots.$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(m+1)}\phi(y-m-1)+\text{ecc.}$$

essendo $\phi(y)$ una funzione arbitraria dell' y.

Per determinarla si faccia $x=0$: avremo

$$z_{x,y}=z_{0,y}+xz_{0,y-1}+\frac{x(x-1)}{2}z_{0,y-2}+\ldots.$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{2\cdot3\cdot4\ldots(m+1)}z_{0,y-m-1}+\text{ec.}$$

E siccome $z_{0,y}$, $z_{0,y-1}$ ecc. $z_{0,1}$ (rappresentando i numeri delle maniere nelle quali un numero o di lettere possono combinarsi fra loro, prendendone un numero y per volta, ovvero un numero $y-1$ per volta ecc., ovvero una per volta) sono quantità nulle, così sarà $z_{0,y}=z_{0,y-1}=$ ec. $=z_{0,1}=0$. Egualmente sono nulle le quantità $z_{0,-1}$, $z_{0,-2}$ ecc., e solo $z_{0,0}$ è eguale all'unità; s' avrà dunque, facendo nella formula superiore $m=y-1$, $z_{x,y}=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{2\cdot3\cdot4\ldots y}$; questa formula è la stessa che la ritrovata al § 32.

§ 92. I valori di $z_{x,y}$, quando una delle variabili ovvero ambedue sono nulle, debbono essere dati dalle circostanze del problema, e noi abbiamo; parimente negli esempj superiori, considerati come dati dalle condizioni del quesito i valori di $z_{x,y}$, allorachè, essendo una variabile nulla, l'altra diveniva negativa. Per altro avremmo potuto più rigorosamente ottenere questi valori col mezzo di considerazioni puramente analitiche, le quali essendo comuni a qualunque problema, meritano di essere fatte.

Ad oggetto però di spiegarci con maggior semplicità, noi supporremo che l' equazioni a differenze parziali appartengano alle serie *recurro-recurrenti*, di cui è data al § 87 la forma generale; in questa supposizione, che non altera la generalità delle nostre indagini, $z_{1,0}$, $z_{2,0}$, ... $z_{x,0}$ saranno i termini della prima fila orizzontale, e $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, ... $z_{0,y}$ quelli della prima verticale.

Riprendiamo ora l' equazione integrata al § 89 e supponiamo che ancora B' sia nullo: avremo allora $\beta = -\frac{A+B\alpha}{C'\alpha} = -\frac{B}{C'}\left(1+\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{\alpha}\right)$, e facendo $-\frac{B}{C'}=p$; $\frac{A}{B}=q$, sarà $\beta = p\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)$, e perciò

$$z_{x,y} = \alpha^x\beta^y = p^y\left(\alpha^x + yq\alpha^{x-1}\right.$$
$$\left. + \frac{y(y-1)}{2}q^2\alpha^{x-2} + \ldots\ldots + q^y\alpha^{x-y}\right);$$

Questa espressione, a tenore di ciò che abbiam detto (86), si cangerà in

$$z_{x,y} = p^y\left(z_{x,0} + yq\cdot z_{x-1,0}\right.$$
$$\left. + \frac{y(y-1)}{2}q^2\cdot z_{x-2,0} + \ldots + q^y\cdot z_{x-y,0}\right);$$

Ora è manifesto che quando y è maggiore di x, una tal formola contiene termini di questa specie $z_{-1,0}$, $z_{-2,0}$ ecc., i quali, se non sono conosciuti, si determineranno col mezzo dei termini $z_{0,1}$, $z_{0,2}$ ecc. della prima fila verticale in questa guisa.

Facciasi nella formola trovata onde esprimere il termine generale, $x=0$ ed $y=1, 2, 3$ ecc., avremo allora

$$z_{0,1} = p\left(z_{0,0} + qz_{-1,0}\right)$$
$$z_{0,2} = p^2\left(z_{0,0} + 2qz_{-1,0} + q^2z_{-2,0}\right)$$
$$z_{0,3} = p^3\left(z_{0,0} + 3qz_{-1,0} + 3q^2z_{-2,0}\right.$$
$$\left. + q^3z_{-3,0}\right)$$

ecc. ecc.

donde è facile ricavare

$$qz_{-1,0}=\frac{1}{p}z_{0,1}-z_{0,0}$$

$$q^2z_{-2,0}=\frac{1}{p^2}z_{0,2}-\frac{2}{p}z_{0,1}+z_{0,0}$$

$$q^3z_{-3,0}=\frac{1}{p^3}z_{0,3}-\frac{3}{p^2}z_{0,2}+\frac{3}{p}z_{0,1}-z_{0,0}$$

ecc. ecc.

ed in generale

$$q^sz_{-s,0}=\frac{1}{p^s}z_{0,s}-\frac{s}{p^{s-1}}z_{0,s-1}$$
$$+\frac{s(s-1)}{2p^{s-2}}z_{0,s-2}-\text{ecc.}:$$

Si vede adunque che essendo conosciuti i termini della prima fila verticale della serie *recurro-recurrente*, potranno determinarsi per mezzo di essi i termini della prima fila orizzontale d' indice negativo, i quali compariscono nell' espressione del termine generale della serie medesima.

§ 93. Determiniamo le funzioni arbitrarie contenute nell' integrale dell' equazione

$$Az_{x,y}+Bz_{x+1,y}+B'z_{x,y+1}+C'z_{x+1,y+1}=0,$$

avuto in termini finiti col metodo del § 89, e supponiamo che questa equazione appartenga parimente ad una serie *recurro-recurrente* rappresentata generalmente dalla Tavola del § 87.

Abbiamo al § 90 trovate le espressioni di α^x e β^y fatta con una indeterminata ω; e se in esse si pongono in vece delle potenze di ω tante funzioni degli esponenti delle potenze medesime, come ivi è detto, si avranno allora le due seguenti espressioni per α^x, β^y,

ed in conseguenza (86) per $z_{x,0}$, $z_{0,y}$

$$z_{x,0}=\alpha^x=m^x\left\{f(x)+xn\cdot f(x-1)\right.$$
$$\left.+\frac{x(x-1)}{2}n^2\cdot f(x-2)+\ldots\ldots+n^x\cdot f(0)\right\}.$$
$$z_{0,y}=\beta^y=p^y\left\{f(0)+y\cdot qf(-1)\right.$$
$$\left.+\frac{y(y-1)}{2}\cdot q^2f(-2)+\ldots\ldots+q^y\cdot f(-y)\right\}.$$

Supponiamo successivamente
$x=0, 1, 2, 3$ ecc., ed avremo

$$z_{0,0}=f(0).$$
$$z_{1,0}=m\{f(1)+nf(0)\}$$
$$z_{2,0}=m^2\{f(2)+2n\cdot f(1)+n^2f(0)\}$$
$$z_{3,0}=m^3\{f(3)+3n\cdot f(2)+3n^2\cdot f(1)+n^3f(0)\}$$

ecc.
dalle quali si ricava

$$f(0)=z_{0,0}$$
$$\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{mn}z_{1,0}-z_{0,0}$$
$$\frac{1}{n^2}f(2)=\frac{1}{m^2n^2}\cdot z_{2,0}-\frac{2}{mn}\cdot z_{1,0}+z_{0,0}$$
$$\frac{1}{n^3}f(3)=\frac{1}{m^3n^3}\cdot z_{3,0}-\frac{3}{m^2n^2}\cdot z_{2,0}+\frac{3}{mn}\cdot z_{1,0}-z_{0,0}$$

ecc.

$$\frac{1}{n^x}f(x)=\frac{1}{m^xn^x}\cdot z_{x,0}-x\frac{1}{m^{x-1}n^{x-1}}\cdot z_{x-1,0}$$

$$+\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{1}{m^{x-2}n^{x-2}}\cdot z_{x-2,0}-\ldots\pm z_{0,0}.$$

Nel modo stesso supponiamo successivamente $y=0, 1, 2, 3, 4$ ecc., e s' avrà

$$z_{0,0}=f(0)$$

$$z_{0,1}=p\{f(0)+q\cdot f(-1)\}$$

$$z_{0,2}=p^2\{f(0)+2q\cdot f(-1)+q^2\cdot f(-2)\} \text{ ecc.}$$

donde si ricava

$$f(0)=z_{0,0}$$

$$qf(-1)=\frac{1}{p}z_{0,1}-z_{0,0}$$

$$q^2f(-2)=\frac{1}{p^2}\cdot z_{0,2}-\frac{2}{p}z_{0,1}+z_{0,0} \text{ ecc.}$$

$$q^yf(-y)=\frac{1}{p^y}\cdot z_{0,y}-\frac{y}{p^{y-1}}\cdot z_{0,y-1}$$

$$+\frac{y(y-1)}{2}\cdot\frac{1}{p^{y-2}}\cdot z_{0,y-2}-\ldots\pm z_{0,0};$$

Si prende il segno $+$ quando x, y sono pari, il $-$ quando sono impari.

Le funzioni adunque tanto positive quanto negative sono determinate per mezzo dei termini della serie.

§ 94. Se per fare una applicazione del secondo metodo del § 90, si risolve per mezzo di esso l' equazione $z_{x+1,y+1}=z_{x,y+1}+z_{x,y}$ proposta al § 91, avremo

$A=1, B'=1, C'=-1, B=0$; e perciò
$m=1, n=1, p=0, q=\infty, pq=1$. Di più

$z_{0,0} = z_{1,0} = z_{2,0} = \text{ecc.} = 1$,

$z_{0,1} = z_{0,2} = z_{0,3} = \text{ecc.} = 0$:

sostituendo pertanto questi valori nelle superiori formole, avremo

$f(0) = 1$, $f(1) = 1 - 1 = 0$,

$f(2) = 1 - 2 + 1 = 0$ ecc., $f(x) = 0$

$f(-1) = \frac{1}{1} \cdot 0 - \frac{1}{\infty} = 0$, e così

$f(-2) = 0$, $f(-3) = 0$ ecc. $f(-y) = 0$.

Si vede adunque che di tutt' i termini che porta la formola del § 90 per l'integrale completo, in questo caso non sarà zero quello soltanto moltiplicato per $f(0)$; ora il coefficiente di $f(0)$ in quella formola è $V^{(x)}$; dunque abbiamo $z_{x,y} = V^{(x)}$.

Se nel valore di $V^{(s)}$ trovato al § 90 si fa $s = x$, s'avrà

$$V^{(x)} = m^x p^y \left\{ \frac{x(x-1)\ldots 1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots x} n^x + \frac{x(x-1)\ldots 2}{2\cdot 3\ldots x-1} n^{x-1} \cdot yq \right.$$

$$+ \frac{x(x-1)\ldots 3}{2\cdot 3\ldots x-2} n^{x-2} \cdot \frac{y(y-1)}{2} q^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ xn \frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{2\cdot 3\ldots x-1} q^{x-1}$$

$$\left. + \frac{y(y-1)\ldots(y-x+1)}{2\cdot 3\ldots x} q^x \right\} \text{ che si riduce così}$$

$$V^{(x)} = m^x p^y \left\{ n^x + xn^{x-1} \cdot yq + \frac{x(x-1)}{2} n^{x-2} \cdot \frac{y(y-1)}{2} q^2 \right.$$

$$\ldots + xn \frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(x-1)} q^{x-1}$$

$$\left. + \frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{2\cdot 3\ldots x} q^x \right\} : \text{ ovvero}$$

$$V^{(x)} = m^x n^x p^y + x m^x n^{x-1} \cdot y p^y q + \ldots$$
$$+ \frac{x(x-1)\ldots(x-y+1)}{2\cdot 3\ldots y} m^x n^{x-y} \times$$
$$\frac{y(y-1)\ldots 1}{2\cdot 3\ldots y} p^y q^y \ldots\ldots + xn \frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{2\cdot 3\ldots(x-1)} \times$$
$$m^x p^y q^{x-1} + \frac{y(y-1)\ldots(y-x+1)}{2\cdot 3\ldots x} m^x p^y q^x;$$

E facendo in questa formula $p=0$, $q=\infty$, $pq=1$, $m=n=1$, avremo

$V^{(x)} = \frac{x(x-1)\ldots(x-y+1)}{2\cdot 3\ldots y}$, poichè tutti i termini, nei quali il p ha una maggiore dimensione del q, vanno a zero, essendo anco p nullo; e quegli altri nei quali è maggiore la dimensione del q, vanno a zero, perchè nei loro coefficienti si trova il fattore $y-y$: avremo adunque per $z_{x,y}$ questa espressione

$$z_{x,y} = \frac{x(x-1)\ldots(x-y+1)}{2\cdot 3\ldots y}, \text{ trovata anche al § 91.}$$

CAPO XII.

Dell' integrazione dell' equazioni degli ordini superiori.

§ 95. Sia l' equazione del secondo ordine

$$(E)\quad \left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} \\ \quad\quad + C''z_{x,y+2} \end{array}\right\} = 0$$

ove A, B, ecc. sono coefficienti costanti.

Poniamo come sopra (§ 86) $z_{x,y} = E\alpha^x\beta^y$ essendo E, α, β tre costanti indeterminate. Fatte le opportune sostituzioni nella proposta, si avrà tra α e β quest' equazione

$$\left.\begin{array}{l} AE\alpha^x\beta^y + BE\alpha^{x+1}\beta^y + CE\alpha^{x+2}\beta^y \\ \quad + B'E\alpha^x\beta^{y+1} + C'E\alpha^{x+1}\beta^{y+1} \\ \quad\quad + C''E\alpha^x\beta^{y+2} \end{array}\right\} = 0$$

che divisa per $E\alpha^x\beta^y$ diviene
$A + B\alpha + C\alpha^2 + B'\beta + C'\alpha\beta + C''\beta^2 = 0$,
da cui si ricava

$$\beta = -\frac{1}{2C''}\left\{C'\alpha + B' \pm \surd\{(C'\alpha + B')^2 - 4C''(C\alpha^2 + B\alpha + A)\}\right\},$$

e quindi

$$z_{x,y} = E\alpha^x\beta^y =$$

$$E\alpha^x\left[-\frac{1}{2C''}\left\{C'\alpha + B' \pm \surd\{(C'\alpha + B')^2 - 4C''(C\alpha^2 + B\alpha + A)\}\right\}\right]^y;$$

il doppio segno del radicale ci dà dunque due valori di $z_{x,y}$.

Preso il segno superiore, suppongasi sviluppato in serie quel valore di $z_{x,y}$ e sia questa serie

$$z_{x,y} = T \cdot \alpha^{x+\mu y} + T' \cdot \alpha^{x+\mu y-\mu'}$$
$$+ T'' \cdot \alpha^{x+\mu y-\mu''} + \text{ecc.}$$

Per la stessa ragione allegata al § 86 si potrà porre in vece di $\alpha^{x+\omega}$ la funzione arbitraria $\phi(x+\omega)$; avremo adunque

$$z_{x,y} = T \cdot \phi(x + \mu y) + T' \phi(x + \mu y - \mu') + T'' \cdot \phi(x + \mu y - \mu'') + \text{ecc.}$$

E preso il segno inferiore, sia l' altra serie

$$z_{x,y} = V . a^{x+vy} + V' a^{x+vy-v'} + V'' . a^{x+vy-v''} + \text{ecc.};$$

ove ponendo, in vece di $a^{x+\omega}$, una funzione arbitraria $\Psi(x+\omega)$, avremo

$$z_{x,y} = V \cdot \Psi(x + vy) + V' \cdot \Psi(x + vy - v') + V'' \cdot \Psi(x + vy - v'') + \text{ecc.};$$

e questo sarà un secondo valore di $z_{x,y}$: ora l' equazione proposta essendo lineare, soddisfarà ad essa ancora la somma di questi due trovati valori, e si avrà

$$\begin{aligned} z_{x,y} = & T \cdot \phi(x + \mu y) + T' \cdot \phi(x + \mu y - \mu') \\ & + T'' \cdot \phi(x + \mu y - \mu'') + \text{ecc.} \\ & + V \cdot \Psi(x + vy) + V' \cdot \Psi(x + vy - v') \\ & + V'' \cdot \Psi(x + vy - v'') + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Questo valore di $z_{x,y}$ è chiamato dai geometri integrale completo perchè, essendo esso del secondo ordine, contiene due funzioni arbitrarie ϕ, Ψ.

Le quantità T, T', T'' ecc. V, V' V'' ecc. sono funzioni di y che si trovano facendo l' attuale svolgimento delle funzioni in serie. L' espressione che noi abbiamo trovata per $z_{x,y}$ sarà sempre infinita, se la quantità che è sotto il segno radicale non è un quadrato perfetto, cioè se l' equazione fra α e β non è risolubile in due fattori di primo grado.

Al ritrovato valore del β dar si può questa forma

$\beta = -\frac{1}{2C''}\left\{ C'\alpha + B \pm \sqrt{(p\alpha^2 + q\alpha + r)} \right\}$, ed è chiaro che se, in vece dell' indeterminata α, è presa una

funzione intiera di un' altra indeterminata ω, tale che la quantità $p\omega^2 + q\omega + r$ sia un quadrato perfetto, svanirà dal valore di β il radicale, ed allora si potrà ridurre il valore di β^y in una serie finita ordinata con le potenze di ω. Avremo così l' integrale in termini finiti. Noi non facciamo questo calcolo, e rimandiamo i lettori al quarto capo del primo tomo del nostro *corso completo*.

§ 96. Se l' equazione tra α e β potesse risolversi in due fattori di primo grado, se potesse, cioè, mettersi sotto questa forma $(\beta - a'\alpha - b')\ (\beta - a''\alpha - b'') = 0$, l' integrale completo allora composto sarebbe di un numero finito di termini; in fatti avrebbesi $\beta = a'\alpha + b'$, $\beta = a''\alpha + b''$; e quindi $z_{x,y} = E\alpha^x\,(a'\alpha + b)^y$, $z_{x,y} = E'\alpha^x\,(a''\alpha + b)^{y}$ essendo E' un' altra costante arbitraria; e presa ora la somma di questi due valori di z si avrebbe

$$z_{x,y} = E\,\alpha^x\,(a'\alpha + b')^y + E'\alpha^x\,(a''\alpha + b'')^y;$$

ovvero sviluppando colla formola neutoniana, e sostituendo $\phi\,(x + y)$ in vece di $E\alpha^{x+y}$; e $\phi'\,(x + y)$ in vece di $E'\alpha^{x+y}$, si troverebbe

$$z_{x,y} = a'^y\phi(x+y) + ya'^{y-1}b'.\phi(x+y-1) + ... + b'^y\phi(x)$$
$$+ a''^y\phi'(x+y) + ya''^{y-1}b''.\phi'(x+y-1) + ... + b''^y\phi'(x);$$

Questo valore di $z_{x,y}$ sarebbe in tal caso l' integrale completo della proposta, perchè contiene due funzioni arbitrarie.

§ 97. Il metodo adoperato per l' equazioni dell' ordine secondo si può anche applicare a quelle degli ordini superiori; ma in queste l' integrale è sempre espresso con serie composte di un numero infinito

di termini, eccettuato il caso nel quale l'equazioni tra α e β siano decomponibili in fattori di primo grado.

Così se l'equazione fosse

$$Nz_{x+n,\,y} + N'z_{x+n-1,\,y+1}$$
$$+ N''z_{x+n-2,\,y+2} + \ldots + N^{(n)}z_{x,\,y+n} = 0,$$

avremmo fra α e β l'equazione

$$N\alpha^n + N'\alpha^{n-1}\beta + N''\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + N^{(n)}\beta^n = 0,$$

che può sempre supporsi risoluta in fattori di questa forma $\beta - \alpha'\alpha$.

Di fatto divisa per α^n, e risguardando $\frac{\beta}{\alpha}$ come l'incognita dell'equazione, si avrebbero n valori di $\frac{\beta}{\alpha}$: Siano questi α', α'', α''', ... $\alpha^{(n)}$, ed i su mentovati fattori sarebbero $\beta - \alpha'\alpha$, $\beta - \alpha''\alpha$, $\beta - \alpha'''\alpha$, ec.; avremmo pertanto $\beta = \alpha'\alpha$, $\beta = \alpha''\alpha$, ecc., e perciò, facendo lo stesso discorso del § antecedente, si troverebbe

$$z_{x,\,y} = \alpha'^y\varphi'(x+y) + \alpha''^y\varphi''(x+y)$$
$$+ \alpha'''^y\varphi'''(x+y) + \ldots\ldots + \alpha^{(n)y}\varphi^{(n)}(x+y);$$

essendo $\varphi'(x+y)$, $\varphi''(x+y)$, ecc. funzioni arbitrarie diverse di $x+y$.

Quando l'equazione proposta non ha che i termini nei quali le variabili x, y hanno i medesimi aumenti, cioè quando è

$$Az_{x,\,y} + Bz_{x+1,\,y+1} + \ldots + Pz_{x+m,\,y+m} = 0,$$

facendo come sopra $z_{x,\,y} = \alpha^x\beta^y$, si otterrà l'equazione $A + B\alpha\beta + \ldots\ldots + P\alpha^m\beta^m = 0$, la quale, considerando per incognita $\alpha\beta$, ci darà m valori α', α''

ecc. per $\alpha\beta$; e potremo perciò dare ad essa questa forma

$$(\alpha\beta - \alpha')\ (\alpha\beta - \alpha'')\ (\alpha\beta - \alpha''') \ldots . (\alpha\beta - \alpha^{(m)}) = c.$$

Da questi m fattori si ricavano m valori del β, i quali sono $\alpha'\alpha^{-1}$, $\alpha''\alpha^{-1}$, $\alpha'''\alpha^{-1}$ ecc. : così per $z_{x,y}$ si hanno m valori diversi, i quali sono $\alpha'^{y} \cdot \alpha^{x-y}$, $\alpha''^{y} \cdot \alpha^{x-y}$, $\alpha'''^{y} \cdot \alpha^{x-y}$ ecc. Presa ora la somma di questi valori, e introducendo le diverse funzioni arbitrarie come al § 86, s' avrà l' integrale

$$z_{x,y} = a'^{y} \cdot f'(x-y) + a''^{y} \cdot f''(x-y)$$

$$+ a'''^{y} \cdot f'''(x-y) + \ldots . + a^{(m)^{y}} \cdot f^{(m)}(x-y),$$

nel quale f', f'', f''' ecc. rappresentano funzioni arbitrarie diverse della quantità $x-y$.

§ 98. Risolviamo adesso un problema sopra la partizione dei numeri, la cui soluzione dipende dall' integrazione di una equazione colle differenze finite e parziali.

In quante maniere il prodotto di un numero x *di lettere* a, b, c, d, e . . . . m *può avere la somma degli esponenti di quelle lettere eguale ad* y, *supponendo che i detti esponenti siano intieri e positivi.*

S' intende facilmente che quel cercato numero di maniere sarà diverso secondo che diverso sarà quel numero x delle lettere, ed il numero y degli esponenti: sarà dunque una funzione di x, y.

Sia rappresentato da $z_{x,y}$; siano p, q, r gli esponenti di quelle lettere: il problema si riduce a trovare in quante maniere può farsi
$p + q + r +$ ecc. $= y$.

Facendo $p = 1$, $z_{x-1,y-1}$ rappresenterà il numero delle maniere nelle quali può essere
$1 + q + r + s +$ ecc. $= y$, ovvero

$q + r + s +$ ecc. $= y - 1$: ora il numero totale $z_{x,y}$ delle maniere è eguale a questo numero di maniere $z_{x-1,y-1}$ più a tutte quelle nelle quali può essere

$2 + q + r + s +$ ecc. $= y$ ovvero
$1 + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$;
$3 + q + r + s +$ ecc. $= y$ ovvero
$2 + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$;
$4 + q + r + s +$ ecc. $= y$ ovvero
$3 + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$, ecc.
ovvero $p + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$, il quale ultimo numero di maniere è espresso da $z_{x,y-1}$:

Abbiamo dunque $z_{x,y} = z_{x-1,y-1} + z_{x,y-1}$.

Per integrare quest' equazione facciasi al solito $z_{x,y} = a^x \beta^y$, ed avremo $a\beta = 1 + a$, da cui si ricava $\beta = 1 + \frac{1}{a}$. Sarà dunque

$$a^x \beta^y = a^x \left(1 + \frac{1}{a}\right)^y = a^x + y a^{x-1}$$
$$+ \frac{y(y-1)}{2} a^{x-2} + \frac{y(y-1)(y-2)}{2 \cdot 3} a^{x-3} + \ldots + a^{x-y}.$$

Moltiplicando questa equazione per β , si otterrà

$$a^x \beta^{y+1} = a^x \beta + y a^{x-1} \beta$$
$$+ \frac{y(y-1)}{2} a^{x-2} \beta + \frac{y(y-1)(y-2)}{2 \cdot 3} a^{x-3} \beta + \ldots$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{2 \cdot 3 \ldots (x-1)} a\beta + \ldots + a^{x-y} \beta ;$$

Ora ponendo la funzione arbitraria $\phi(x)$ in vece di βa^x , avremo

$$z_{x,y+1} = \phi(x) + y\phi(x-1) + \frac{y(y-1)}{2}\phi(x-2) + \ldots$$
$$+ \frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{2\cdot3\ldots(x-1)}\phi(1)\ldots + \phi(x-y).$$

Per determinare la funzione arbitraria $\phi(x)$, si faccia $y=0$; avremo allora $\phi(x) = z_{x,1}$, e perciò

$$z_{x,y+1} = z_{x,1} + yz_{x-1,1} + \frac{y(y-1)}{2}z_{x-2,1} + \ldots$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{2\cdot3\ldots(x-1)}z_{1,1} + \ldots + z_{x-y,1}.$$

Ma $z_{x,1}$, $z_{x-1,1}$, $z_{x-2,1}$ ecc., $z_{2,1}$ sono tutte quantità nulle; e $z_{1,1} = 1$ (poichè avendo un numero m di lettere è impossibile che la somma dei loro esponenti sia eguale all' unità), e le quantità $z_{0,1}$, $z_{-1,1}$, $z_{-2,1}$ sono parimente tutte nulle; dunque avremo

$$z_{x,y+1} = \frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{2\cdot3\cdot4\ldots(x-1)};$$

la quale espressione (ponendovi $y-1$ in vece dell' y) diviene

$$z_{x,y} = \frac{(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{2\cdot3\cdot4\ldots(x-1)},$$

che è il cercato numero di maniere.

Che poi $z_{0,1}$, $z_{-1,1}$, $z_{-2,1}$ siano eguali a zero, si dimostrerà così.

Siccome le quantità $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, $z_{0,3}$ ecc. rappresentano le maniere nelle quali un numero zero di lettere può avere la somma degli esponenti eguali ad 1, 2, 3, ecc., così esse saranno tutte nulle.

Se dunque nella serie che rappresenta il valore di $z_{x, y+1}$ facciamo $x=0$, ed $y=1, 2, 3$, ecc., avremo

$$z_{0,2}=z_{0,1}+z_{-1,1}$$

$$z_{0,3}=z_{0,1}+2z_{-1,1}+z_{-2,1}$$

$$z_{0,4}=z_{0,1}+3z_{-1,1}+3z_{-2,1}+z_{-3,1} \text{ ecc.,}$$

le quali equazioni ci danno ancora

$$z_{-1,1}=z_{-2,1}=z_{-3,1}=\text{ecc.}=0.$$

Sia, per esempio, $y=5$, $x=3$, ed avremo

$z_{3,5}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$: in fatti quando si hanno tre lettere a, b, c, non può la somma dei loro esponenti essere eguale a 5 che in una di queste sei maniere $a^1b^1c^3$; $a^1b^3c^1$; $a^3b^1c^1$; $a^1b^2c^2$; $a^2b^1c^2$; $a^2b^2c^1$; se poi gli esponenti p, q, r, ecc. che abbiamo supposti maggiori di zero, volessero prendersi anche eguali a zero, allora con uno stesso ragionamento, rappresentando con $z_{x,y}$ il cercato numero di maniere, si troverebbe, per risolvere il problema, questa equazione

$z_{x,y}=z_{x-1,y}+z_{x,y-1}$, il cui integrale sarebbe

$$z_{x,y}=\frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+x-1)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(x-1)}.$$

Ecco il ragionamento che ci conduce alla suddetta equazione: facciamo $p=0$, ed il cercato numero di maniere sarà eguale al numero delle maniere nelle quali può essere $0+q+r+s+\text{ecc.}=y$, il qual numero rappresentato da $z_{x-1,y}$, più il numero di maniere nelle quali può essere

$1 + q + r + s +$ ecc. $= y$ ovvero
$0 + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$;
$2 + q + r + s +$ ecc. $= y$ ovvero
$1 + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$;
$3 + q + r + s +$ ecc. $= y$ ovvero
$2 + q + r + s +$ ecc. $= y - 1$, ecc.
che è evidentemente $z_{x, y-1}$, e perciò

$$z_{x,y} = z_{x-1,y} + z_{x,y-1}.$$

§ 99. Se dopo aver sostituito $\alpha^x \beta^y$ in vece di $z_{x,y}$ nelle equazioni lineari a differenze parziali considerate ai §§ 95 e 97, non facciamo la divisione per $\alpha^x \beta^y$, si ottengono allora alcune equazioni le quali, ordinate secondo le potenze di β, hanno questa forma

$$(1) \ldots A\beta^y + A1 \cdot \beta^{y+1} + A2 \cdot \beta^{y+2} + \ldots + An \cdot \beta^{y+n} = 0,$$

ovvero, ordinate secondo quelle di α, quest' altra

$$(2) \ldots B\alpha^x + B1 \cdot \alpha^{x+1} + B2 \cdot \alpha^{x+2} + \ldots + Bn \cdot \alpha^{x+n} = 0,$$

e queste due equazioni sono in sostanza la stessa cosa.

Ora la prima dà n valori diversi del β, i quali sono altrettante funzioni dell' α; siano β, β' β'', ecc. questi valori. La seconda ci dà n diversi valori dell' α fatti con β, e siano α, α', α'', ecc.; così di qualunque ci serviamo di queste equazioni, avremo sempre n espressioni diverse di $\alpha^x \beta^y$, e quindi un numero di n valori di $z_{x,y}$. In ciascuna di queste espressioni introducendo, col ripiego di cui sopra ci siamo serviti, una funzione arbitraria, la somma di quelle medesime espressioni darà l' integrale completo dell' equazione proposta. Ma se l' equazione fra α e β avesse alcune delle radici eguali, è evidente che il numero dell' espressioni diverse di $\alpha^x \beta^y$ scemerebbe di tante unità quanto è il numero delle

radici eguali meno una, e che in conseguenza l'integrale non risulterebbe completo. Vediamo come si potrà completare di nuovo.

Avvertiamo prima che se l'equazione (1) ha un numero m di radici eguali fatte con α, cioè se

$$\beta = \beta' = \beta'' = \ldots\ldots = \beta^{(m-1)},$$

l'equazione (2) avrà il medesimo numero di radici eguali fatte con β, cioè $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots\ldots = \alpha^{(m-1)}$.

Ora se nell'equazione (1) due radici, per esempio β, β' sono eguali: una di queste soddisfà come si è detto (§ 54) nel medesimo tempo a quella equazione e a quest' altra (1)'

$$(1)' \ldots y A\beta^{y-1} + (y+1) A1 \cdot \beta^{y} + (y+2) A2 . \beta^{y+1} + \ldots$$
$$+ (y+n) A(n) \cdot \beta^{y+n-1} = 0;$$

e se tre sono le radici eguali β, β', β'', una di queste soddisfà nel medesimo tempo alle due equazioni (1), (1)', e a quest' altra (1)''

$$(1)'' \ldots y(y-1) A\beta^{y-2} + (y+1) y A1 \cdot \beta^{y-1} + \ldots\ldots$$
$$+ (y+n)(y+n-1) A(n) \cdot \beta^{y+n-2} = 0,$$

e così via via.

L'equazione (1)' è ricavata dall'equazione (1) moltiplicando ciascun termine di questa ultima per l'esponente che vi ha β, e quindi dividendo per β; e nella medesima guisa si ricava l'equazione (1)'' dall'equazione (1)'. E siccome sono eguali tre radici β, β', β'' dell'equazione (1), lo sono anche tre α, α', α'' dell'equazione (2); così una di queste soddisfarà nel tempo stesso all'equazione (2) ed alle seguenti (2)', (2)''

$$(2)' \ldots\ldots x B\alpha^{x-1} + (x+1) B1 \cdot \alpha^{x}$$
$$+ (x+2) B2 \cdot \alpha^{x+1} + \ldots + (x+n) B(n) \cdot \alpha^{x+n-1} = 0$$

$(2)'' \ldots\ldots x(x-1)Ba^{x-2} + (x+1)xB1 \cdot a^{x-1} + \ldots\ldots$

$+ (x+n)(x+n-1)B(n) \cdot a^{x+n-2} = 0$;

e perciò le sei equazioni (1), (1)', (1)'', (2), (2)', (2)'' saranno sempre soddisfatte nel medesimo tempo da una delle radici eguali.

Si vede adunque che se due sono le radici eguali dell' equazione (1), soddisfà alla proposta tanto $z_{y,x} = a^x \beta^y$, quanto $z_{x,y} = y a^x \beta^{y-1}$, purchè β sia una di queste due radici eguali: in fatti sostituito questo secondo valore nell' equazione colle differenze finite, in vece di ottenersi l' equazione (1) si ottiene la (1)', la quale è pur soddisfatta. Così nel caso di tre radici eguali, potranno prendersi per $z_{x,y}$ queste tre espressioni

$$z_{x,y} = a^x \beta^y.$$

$$z_{x,y} = y a^x \beta^{y-1}$$

$$z_{x,y} = y(y-1) a^x \beta^{y-2}$$

essendo β una di queste tre radici eguali.

Se le radici eguali fossero quattro, avremo anche $z_{x,y} = y(y-1)(y-2) a^x \beta^{y-3}$ e così di mano in mano; e siccome le espressioni di $z_{x,y}$ possono essere moltiplicate per una costante qualunque C, la quale entrando come moltiplicatore in tutt' i termini dell' equazione colle differenze parziali, svanisce e rimane indeterminata; così se questa costante si suppone eguale all' unità nel primo valore di $z_{x,y}$, eguale a β nel secondo, a β^2 nel terzo ecc., avremo

per $z_{x,y}$ nel caso delle radici eguali, le seguenti espressioni

$$\alpha^x \beta^y ; y\alpha^x \beta^y ; y(y-1)\alpha^x \beta^y ; y(y-1)(y-2)\alpha^x \beta^y ; \text{ec.}$$

Facendo per α il medesimo ragionamento, avremo anco quest' altre espressioni di $z_{x,y}$, cioè

$$\alpha^x \beta^y ; x\alpha^x \beta^y ; x(x-1)\alpha^x \beta^y ; x(x-1)(x-2)\alpha^x \beta^y ; \text{ec.}$$

§ 100. Si potrebbero nel modo stesso trovare altri valori per $z_{x,y}$ quando vi sono radici eguali. In fatti se le radici eguali sono tre $\beta = \beta' = \beta''$, $\alpha = \alpha' = \alpha''$ ecc. è manifesto che l' equazione $(1)'$ conterrà due di queste radici eguali a β; e per ciò ordinata questa equazione per α, avrà ancora due radici eguali ad α.

Se ora in questa equazione $(1)'$ ordinata che sia con le potenze dell' α, si moltiplicano i termini con gli esponenti x, $x+1$ ecc., $x+n$ di quelle potenze medesime di α, avremo una equazione (a) che sarà soddisfatta nel medesimo tempo che l' equazioni (1), $(1)'$, e si vedrà facilmente che se facciamo $z_{x,y} = xy\alpha^x\beta^y$, e sostituiamo un tal valore del $z_{x,y}$ nella proposta, sarà essa trasformata nell' equazione (a), la quale essendo soddisfatta da una delle radici eguali, ci mostra essere $xy\alpha^x\beta^y$ un' altra espressione della funzione $z_{x,y}$: queste diverse espressioni serviranno sempre a ridurre completo l' integrale della proposta quando le radici eguali lo avranno reso non completo.

Sia, per esempio, l' equazione

$$z_{x,y} = \frac{1}{4} z_{x-1,\, y+1} + z_{x+1,\, y-1}.$$

Facendo in questa equazione crescere la x e la y d' un' unità e moltiplicandola tutta per 4, avremo

$z_{x,y+2} - 4z_{x+1,y+1} + 4z_{x+2,y} = 0$,

equazione che è del secondo ordine.

Paragonata questa equazione con quella del § 95, abbiamo $A = B = B' = 0$, $C = 4$, $C' = -4$, $C'' = 1$, onde l'equazione da risolversi è $\beta^2 - 4\beta\alpha + 4\alpha^2 = 0$, la quale dà per β due valori eguali a 2α; e se β', β'' rappresentano i due valori di β, s' avrà $\beta' = \beta'' = 2\alpha$.

Dunque l' equazione fra α e β di secondo grado è divisibile in due fattori di primo della forma $\beta - a'\alpha$, $\beta - a''\alpha$; si ha perciò

$$z_{x,y} = a'^y \phi'(x+y) + a''^y \phi''(x+y):$$

ma essendo $a' = a'' = 2$, avremo

$$z_{x,y} = 2^y \{\phi'(x+y) + \phi''(x+y)\}.$$

Le due funzioni $\phi'(x+y)$, $\phi''(x+y)$ sono arbitrarie, e per ciò possiamo rappresentare con una funzione arbitraria $\phi(x+y)$ la somma $\phi'(x+y) + \phi''(x+y)$ di esse; per questo sarà

$z_{x,y} = 2^y \phi(x+y)$ l' integrale non completo, poichè contiene una sola funzione arbitraria.

Ora abbiamo sopra veduto che quando sono due le radici eguali, oltre dell' espressione $\alpha^x \beta^y$ soddisfà alla proposta equazione anche $y\alpha^x\beta^y$, e perciò facendo $\beta = 2\alpha$, soddisfarà alla nostra equazione $y \cdot 2^y \cdot \alpha^{x+y}$, ovvero $y \cdot 2^y \phi'(x+y)$: questa ultima espressione di $z_{x,y}$ sarà un altro integrale particolare, e se prendiamo l' aggregato di questi due integrali particolari, avremo l' integrale completo di quella proposta equazione espresso da

$$z_{x,y} = 2^y \phi(x+y) + 2^y \cdot y\phi'(x+y).$$

§ 101. Riprendiamo l'equazione del secondo ordine

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} \\ \qquad + z_{x,y+2} \end{array}\right\} = 0$$

per esporre un altro metodo d'integrazione, il quale dia sempre l'integrale espresso con un numero finito di termini.

Posto $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$ si ha tra α e β quest' equazione (1) ..... $A + B\alpha + C\alpha^2 + B'\beta + C'\alpha\beta + \beta^2 = 0$, da cui si ricava $\beta^2 = -(A + B\alpha + C\alpha^2) - (B' + C'\alpha)\beta$. Moltiplichiamo quest' equazione per β e si avrà $\beta^3 = -(A + B\alpha + C\alpha^2)\beta - (B' + C'\alpha)\beta^2$, e sostituendo nel secondo membro in vece di β^2 il suo valore, si avrà il valore di β^3 che avrà questa forma:

$$\beta^3 = M + M'\alpha + M''\alpha^2 + M'''\alpha^3$$
$$+ (N + N'\alpha + N''\alpha^2)\beta;$$

se moltiplichiamo quest' equazione per β, e nel secondo membro poniamo, in vece di β^2, il di lui valore, si avrà il valore di β^4;

Ed operando nello stesso modo sui valori di β^5, β^6, ecc. si avrà in fine il valore di β^y di questa forma

$$(2)\ldots\ldots \beta^y = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 + \ldots\ldots + T^{(y)} \cdot \alpha^y$$
$$+ \left(T_1 + T'_1 \cdot \alpha + T''_1 \cdot \alpha^2 + \ldots\ldots + T_1 \cdot {}^{(y-1)} \alpha^{y-1}\right)\beta;$$

Ove i coefficienti T, T_1, ecc. sono funzioni razionali date per mezzo dell' y e dei coefficienti della equazione proposta.

Se quest' espressione di β^y la moltiplichiamo per α^x, avremo

$$z_{x,y}=Ta^x+T'.a^{x+1}+T''a.^{x+2}+\ldots.+T^{(y)}.a^{x+y}$$
$$+T_1\cdot a^x\beta+T'_1\cdot a^{x+1}\beta+\ldots.+T_1.^{(y-1)}a^{x-1+y}\beta;$$

Il valore adunque di $z_{x,y}$ sarà di questa forma
$$z_{x,y}=A\beta^0+B\beta.$$

Se ora si fa $\beta=0$ si avrà $z_{x,y}=A$, e questo valore di $z_{x,y}$ soddisfarà alla proposta. Vi soddisfarà dunque egualmente $z_{x,y}=B\beta$; ed anche $z_{x,y}=B$ soltanto. Così abbiamo per $z_{x,y}$ questi due valori
$$z_{x,y}=Ta^x+T'\cdot a^{x+1}+T''\cdot a^{x+2}+\ldots.+T^{(y)}.a^{x+y};$$
$$z_{x,y}=T_1\cdot a^x+T'_1\cdot a^{x+1}+\ldots.+T_1.^{(y-1)}.a^{x+y-1}.$$

Ponendo (86) nel primo in vece di a^x una funzione arbitraria $f(x)$ dell' x; e nel secondo $f'(x)$ altra funzione arbitraria di x, e prendendo la somma di questi due valori di $z_{x,y}$, poichè la proposta è lineare, si avrà
$$z_{x,y}=Tf(x)+T'.f(x+1)\ldots\ldots+T^{(y)}\cdot f(x+y)$$
$$+T_1\cdot f'(x)+T'_1\cdot f'(x+1)\ldots.+T_1^{(y-1)}.f(x+y-1);$$
che sarà il cercato integrale completo.

§ 102. Ecco poi come si determineranno quelle due funzioni arbitrarie. Se facciamo $y=0$ si ha $\beta^y=1$, quindi dalla formola (2) del § antecedente ricaviamo $T=1$; $T'=0$; ecc.; $T_1=0$; ecc. E facendo $y=1$, si ha $\beta^y=\beta$, quindi $T_1=1$, e tutti gli altri coefficienti sono nulli; dunque fatto $y=0$, $y=1$ nel trovato integrale si ha $z_{x,y}=f(x)$; $z_{x,1}=f'(x)$; e perciò

$$z_{x,y} = Tz_{x,0} + T'\cdot z_{x+1,0} + \ldots + T^{(y)}\cdot z_{x+y,0}$$
$$+ T_1\cdot z_{x,1} + T'_1\cdot z_{x+1,1} \ldots + T_1^{(y-1)}\cdot z_{x+y-1,1}.$$

Per determinare i coefficienti T, T', ecc., osservo che il valore di β^y avendo questa forma $\beta^y = A + A_1\cdot\beta$, se con $\beta' = ka + l - \sqrt{(ma^2 + na + p)}$; $\beta'' = ka + l + \sqrt{(ma^2 + na + p)}$ si rappresentano le due radici dell' equazione (1), si avrà

$\beta'^y = A + A_1\cdot\beta'$; $\beta''^y = A + A_1\cdot\beta''$, e quindi

$$T + T'a + T''a^2 + \ldots .\ T^{(y)}a^y = A = \frac{\beta''\beta'^y - \beta'\beta''^y}{\beta'' - \beta'}$$

$$T_1 + T_1'\cdot a + T_1''\cdot a^2 + \ldots . + T_1^{(y-1)}\cdot a^{y-1} = A_1$$
$$= \frac{\beta'^y - \beta''^y}{\beta' - \beta''}.$$

Ora sostituiti i valori di β', β'', sviluppiamo i secondi membri in serie secondo le potenze di a, e siano questi sviluppi

$$a + a'a + a''a^2 + \ldots . + a^{(y)}a^y + a^{(y+1)}a^{y+1} + \text{ecc.}$$
$$b + b'a + b''a^2 + \ldots . + b^{(y)}a^y + b^{(y+1)}a^{y+1} + \text{ecc.}$$

(le quantità a, a' ecc. b, b' ecc. sono funzioni cognite dell'y che si determinano per mezzo della formola neutoniana) : è chiaro che la prima serie continuata fino alla potenza a^y inclusivamente, ci darà il valore di A : e che la seconda continuata fino alla potenza a^{y-1} inclusivamente, ci darà il valore di A_1 ; quindi per il paragone delle potenze omologhe dell' a avremo $T = a$, $T' = a'$ ec. $T_1 = b$, $T_1' = b'$ ec.

§ 103. Per farne un esempio prendiamo a risolvere l' equazione

$z_{x,y+2} - 5z_{x+1,y+1} + 6z_{x+2,y} = 0$:

facendo $z_{x,y} = a^x \beta^y$, s' avrà fra a e β quest' equazione da risolversi $\beta^2 - 5a\beta + 6a^2 = 0$, la quale si scioglie in questi due fattori $\beta - 2a$, $\beta - 3a$, e perciò a tenore di quello che è detto al § 97, avremo il di lei integrale

$$z_{x,y} = 3^y \phi(x+y) + 2^y \phi'(x+y),$$

il quale è completo perchè contiene due funzioni arbitrarie.

Se si adoperasse il metodo superiore, facendo $\beta' = 2a$, $\beta' = 3a$, avremmo

$$A = \frac{(3 \cdot 2^y - 2 \cdot 3^y)a^{y+1}}{3a - 2a}, \quad A1 = \frac{(3^y - 2^y)a^y}{3a - 2a}, \text{ cioè}$$

$$A = (3 \cdot 2^y - 2 \cdot 3^y)a^y, \quad A1 = (3^y - 2^y)a^{y-1};$$

è dunque evidente che

$$T = T' = T'' \text{ ecc.} = 0, \quad T^{(y)} = 3 \cdot 2^y - 2 \cdot 3^y,$$

$$T1 = T1' = T1'' = \text{ecc.} = 0, \quad T1^{(y-1)} = 3^y - 2^y,$$

e perciò l' integrale completo secondo questo metodo, sarebbe

$$z_{x,y} = T^{(y)} \cdot f(x+y) + T1^{(y-1)} \cdot f1(x+y-1);$$

ponendo ora per $T^{(y)}$, $T1^{(y-1)}$ i di loro valori, avremmo l' integrale

$$z_{x,y} = (3 \cdot 2^y - 2 \cdot 3^y) f(x+y)$$

$+ (3^y - 2^y) \cdot f1(x+y-1)$, il quale è completo perchè contiene due funzioni arbitrarie.

Facilmente si vede che a questo integrale può darsi la stessa forma che all' altro.

CAPO XIII.

Dell' integrazione dell' equazioni tra più variabili; e di quelle con i coefficienti variabili.

§ 104. Non molto mi estenderò sopra l' integrazione dell' equazioni colle differenze finite fra quattro variabili x, y, u, $z_{x,y,u}$, e solo prendendo ad integrare l' equazione

$$Az_{x,y,u}+Bz_{x+1,y,u}+C'z_{x,y+1,u}+Dz_{x,y,u+1}=0.$$

Facciamo $z_{z,y,u}=C\alpha^x\beta^y\gamma^u$; ove α, β, γ, C sono quantità costanti da determinarsi. Sostituendo il valore di $z_{x,y,u}$ nella proposta, avremo dopo averla divisa per $C\alpha^x\beta^y\gamma^u$, $A+B\alpha+C'\beta+D\gamma=0$, dalla quale si ricava $\gamma=a+b\alpha+c\beta$, avendo fatto $-\dfrac{A}{D}=a$, $-\dfrac{B}{D}=b$, $-\dfrac{C'}{D}=c$: sarà dunque

$$z_{x,y,u}=C\alpha^x\beta^y(a+b\alpha+c\beta)^u.$$

Ora svolgendo la quantità $(a+b\alpha+c\beta)^u$ in una serie ordinata secondo le potenze ed i prodotti di α e β e moltiplicando la suddetta serie per $C\alpha^x\beta^y$, avremo per $z_{x,y,u}$ una espressione di questa forma

$$\begin{aligned} z_{x,y,u}= & C\left(g+h\alpha+\ldots\ldots+p\,\alpha^u\right)\alpha^x\beta^y \\ & +C\left(g'+h'\alpha+\ldots\ldots+l'\alpha^{u-1}\right)\alpha^x\beta^{y+1} \\ & +C\left(g''+h''\alpha+\ldots\ldots+n''\alpha^{u-2}\right)\alpha^x\beta^{y+2} \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +C\cdot g^{(u)}\cdot\alpha^x\beta^{y+u}; \end{aligned}$$

nella quale g, h, p, g', h', l' ecc. $g^{(u)}$ sono funzioni di a, b, c facili ad ottenersi.

Questo valore di $z_{x,y,u}$ rende identica l'equazione proposta, e tale anche la rende (§ 86) se in vece di $Ca^x\beta^y$ vi fosse una funzione $\phi(x, y)$ arbitraria di x, y; dunque potremo fare

$$z_{x,y,u} = g\phi(x,y) + h\phi(x+1,y) + \ldots\ldots + p\phi(x+u,y)$$
$$+ g'\phi(x,y+1) + h'\phi(x+1,y+1) \ldots\ldots + l'\phi(x+u-1,y+1)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + g^{(u)}\phi(x, y+u).$$

E questo valore di z chiamasi l' integrale completo, perchè contiene una funzione arbitraria.

§ 105. Veniamo all' equazioni le quali hanno i coefficienti funzioni della x. Sia da integrarsi la equazione

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x,y+1} + Cz_{x,y+2} \\ \quad + B'z_{x+1,y} + C'z_{x+1,y+1} \end{array}\right\} = X,$$

nella quale A, B, C, B', C', X sono funzioni date dell' x.

Poniamo $z_{x,y} = a_x\beta^y + u_x$, essendo a_x, u_x due funzioni dell' x da determinarsi, e β una costante egualmente da determinarsi. Fatte le opportune sostituzioni nella proposta, avremo per determinare a_x l' equazione

(1)..... $A1_x \cdot a_x + B1_x \cdot a_{x+1} = 0$; e per determinare u_x

(2)..... $A2_x \cdot u_x + B2_x \cdot u_{x+1} = X$; nelle quali è

$A1_x = A + B\beta + C\beta^2$; $\quad B1_x = B' + C'\beta$;

$A2_x = A + B + C$; $\quad B2_x = B' + C'$;

L'equazione (2) non ha alcuna difficoltà (§ 38); ma l'equazione (1) contiene nei suoi coefficienti l'indeterminata β, della quale ci serviremo per introdurre nell'integrale una funzione arbitraria.

In fatti facendo $-A1_x : B1_x = m_x$, si ha (§ 39)

$a_x = Cm_{x-1} \cdot m_{x-2} \cdot m_{x-3} \ldots m_2 \cdot m_1$, essendo C una costante arbitraria, e perciò

$z_{x,y} = C\beta^y \cdot m_{x-1} \cdot m_{x-2} \ldots m_2 \cdot m_1 + u_x$.

Ora essendo

$m_x = -\frac{A1_x}{B2_x} = \frac{A + B\beta + C\beta^2}{B' + C'\beta}$. Riduciamo in serie

secondo le potenze del β, l'espressione

$m_{x-1} \cdot m_{x-2} \cdot m_{x-3} \ldots m_2 \cdot m_1$, e sia questa

$T\beta^{\mu} + T'\beta^{\mu-1} + T''\beta^{\mu-2} + T'''\beta^{\mu-3} +$ ecc.,

avremo allora

$$z_{x,y} = CT\beta^{y+\mu} + CT'\beta^{y+\mu-1}$$
$$+ CT''\beta^{y+\mu-2} + \text{ecc.} + u_x;$$

All'esponenziale indeterminato $\beta^{y+\mu}$ può sostituirsi (§ 86) una funzione qualunque arbitraria dell'esponente $y+\mu$, e sarà per conseguenza l'integrale della proposta

$$z_{x,y} = T\varphi(y+\mu) + T'\varphi(y+\mu-1)$$
$$+ T''\varphi(y+\mu-2) + \text{ecc.} + u_x,$$

indicando con $\varphi(y+\mu)$ la detta funzione arbitraria.

Per determinare questa funzione, facciamo le stesse riflessioni che abbiamo fatte al § 86, e troveremo $\varphi(y+\mu) = z_{0,y+\mu} - u_0$.

Se, quando sono costanti i coefficienti, il secondo membro dell'equazione avesse questa forma $X + Y$, ovvero anche quest' altra $a^y X + b^x Y$, essendo X, X funzioni rispettivamente dell' x e dell' y, ed a e b quantità costanti, si potrebbe fare

$z_{x,y} = \alpha^x \beta^y + a^y u_x + b^x \omega_y$ essendo α e β due costanti, ed u_x, ω_y due funzioni rispettivamente di x e di y da determinarsi; crediamo inutile trattenerci a farne uno sminuzzato generale sviluppo, e piuttosto ci applicheremo ad un esempio.

§ 106. Quale è il termine generale di questa serie *recurro-recurrente?*

	0	1	2	3	4 x
0	1	1	1	1	1 1
1	5	6	7	8	9 . . . .
2	11	25	29	33	
3	19	92	105	118	
4	. . . .				
y	. . . . $z_{x,y}$				

In essa ciascun termine $z_{x,y}$ è eguale al suo indice x, più il numero 2 elevato alla potenza y^{sima}, più il termine $z_{x,y-1}$ che ne è immediatamente al di sopra, più il doppio del termine che segue quest' ultimo.

L' equazione adunque, da cui dipende il termine generale cercato, sarà

$$z_{x,y} = x + 2^y + z_{x,y-1} + 2z_{x+1,y-1}.$$

Pongasi $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y + u_x + \omega_y$ e facendo le opportune sostituzioni nella proposta, avremo

$$\alpha^x \beta^y + u_x + \omega_y = x + 2^y + \alpha^x \beta^{y-1} + u_x$$
$$+ \omega_{y-1} + 2\alpha^{x+1}\beta^{y-1} + 2u_{x+1} + 2\omega_{y-1},$$

la quale può spezzarsi in queste tre

$\beta = 1 + 2\alpha$, $\quad 2u_{x+1} + x = 0$,

$\omega_y - 3\omega_{y-1} = 2^y$,

dalle quali si ricava $\beta^y = 1 + 2y\alpha + \frac{y(y-1)}{2} 2^2\alpha^2$

$$+ \frac{y(y-1)(y-2)}{2 \cdot 3} 2^3\alpha^3 + \ldots + 2^y\alpha^y;$$

$$u_x = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\omega_y = \frac{-3^y}{-3} \Sigma \frac{2^{y+1}}{3^y} = 3^{y-1} . 2\Sigma \left(\frac{2}{3}\right)^y = -2^{y+1} + 3^y C:$$

Avremo adunque

$$z_{x,y} = \alpha^x + y \cdot 2\alpha^{x+1} + \frac{y(y-1)}{2} . 2^2\alpha^{x+2} + \ldots$$
$$+ 2^y \alpha^{x+y} + u_x + \omega_y:$$

ed in conseguenza

$$z_{x,y} = f(x) + y \cdot 2f(x+1) + \frac{y(y-1)}{2} . 2^2 f(x+2) + \ldots$$
$$+ 2^y f(x+y) + u_x + \omega_y,$$

rappresentando $f(x)$ una funzione arbitraria dell' x.

Per determinare questa funzione facciasi $y = 0$, ed avremo

$z_{x,0} = f(x) + u_x + \omega_0$: dunque $f(x) = z_{x,0} - u_x - \omega_0$: l' espressione adunque di $z_{x,y}$ sarà

$$z_{x,y} = \left\{ z_{x,0} + \frac{1}{2}(x-1) + 2 - C \right\}$$
$$+ y \cdot 2 \left\{ z_{x+1,0} + \frac{1}{2} x + 2 - C \right\}$$
$$+ \frac{y(y-1)}{2} \cdot 2^2 \left\{ z_{x+2,0} + \frac{1}{2}(x+1) + 2 - C \right\} \ldots .$$
$$+ 2^y \left\{ z_{x+y,0} + \frac{1}{2}(y+x-1) + 2 - C \right\}$$
$$- \frac{1}{2}(x-1) - 2^{y+1} + 3^y C.$$

Ora la costante svanisce da sè medesima, poichè la somma dei coefficienti di $-C$, è $(1+2)y = 3^y$, e perciò nella espressione suddetta avremo $-3^y C + 3^y C = 0$; sarà dunque

$$z_{x,y} = z_{x,0} + 2y \left\{ z_{x+1,0} + \frac{1}{2} x \right\}$$
$$+ 2^2 \cdot \frac{y(y-1)}{2} \left\{ z_{x+2,0} + \frac{1}{2}(x+1) \right\}$$
$$+ 2^3 \cdot \frac{y(y-1)(y-2)}{2 \cdot 3} \left\{ z_{x+3,0} + \frac{1}{2}(x+2) \right\} + \ldots$$
$$+ 2^y \left\{ z_{x+y,0} + \frac{1}{2}(x+y-1) \right\} + 2 \cdot 3^y - 2^{y+1}.$$

Siccome poi tutti i termini della prima fila orizzontale sono eguali all' unità, così per avere il termine generale di questa serie dovremo fare nella ritrovata formola

$z_{x,0} = z_{x+1,0} =$ ecc. $= 1$: avremo allora, fatte le opportune riduzioni,

$$z_{x,0} = 1 + y\,(x+2) + 2\,\frac{y\,(y-1)}{2}(x+3)$$
$$+ 2^2 . \frac{y\,(y-1)\,(y-2)}{2 \cdot 3}(x+4) + \ldots\ldots$$
$$+ 2^{y-1} . (x+y+1) + 2 . 3^y - 2^{y+1} .$$

Se si fa $x = 2$, $y = 2$, avremo
$z_{2,2} = 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3^2 - 2^3 = 29$ come appunto è nella serie.

§ 107. Il metodo dato al § antecedente dipende dallo sviluppo in serie secondo le potenze di β della funzione
$m_{x-1} \cdot m_{x-2} \cdot m_{x-3} \cdot \ldots\ldots m_2 \cdot m_1$. Ciò potrà conseguirsi con i diversi metodi conosciuti, fra i quali dovrà l' analista scegliere il più adattato alla qualità della quantità $m_x = \frac{A1_x}{B1_x}$.

Solo qui avvertiremo che la serie è sempre finita, quando il denominatore ha un sol termine, ed è allora composta di un numero $2\,(x-1)+1$ di termini.

Qualunque però sia il numero dei termini che compongono il numeratore e denominatore di quella frazione, se ne potrà ottenere lo sviluppo nella seguente maniera:

La frazione $\frac{A + B\beta + C\beta^2}{B' + C'\beta}$ può ricevere questa forma $n_x\beta \cdot \frac{1 + a'_x\beta^{-1} + a''_x\beta^{-2}}{1 + b'_x \cdot \beta^{-1}}$, ove a'_x, a''_x, b'_x, n_x sono funzioni conosciute dell'x. Avremo pertanto

$$m_{x-1} \cdot m_{x-2} \ldots m_2 \cdot m_1 = n_{x-1} \cdot n_{x-2} \ldots n_2 \cdot n_1 \cdot \beta^{x-1} \times$$

$$\frac{1 + a'_{x-1} \cdot \beta^{-1} + a''_{x-1} \beta^{-2}}{1 + b'_{x-1} \cdot \beta^{-1}} \cdot \frac{1 + a'_{x-2} \cdot \beta^{-1} + a''_{x-2} \cdot \beta^{-2}}{1 + b'_{x-2} \cdot \beta^{-1}} \cdot \text{ec.}$$

Ora supponiamo che il prodotto delle quantità complesse contenute fra le parentesi sia eguale a questa serie ordinata con le potenze decrescenti del β $T_x + T'_x \beta^{-1} + T''_x \beta^{-2} + T'''_x \beta^{-3} + T''''_x \beta^{-4} + T^v_x \beta^{-5} +$ ecc., ed allora tutta la difficoltà consisterà nel determinare le funzioni T_x, T'_x, T''_x ec.

Per questo facciamo crescere x di una unità, ed avremo

$$\frac{1 + a'_x \beta^{-1} + a''_x \beta^{-2}}{1 + b'_x \cdot \beta^{-1}} \cdot \frac{1 + a'_{x-1} \cdot \beta^{-1} + a''_{x-1} \cdot \beta^{-2}}{1 + b'_{x-1} \cdot \beta^{-1}} \cdot \text{ec.}$$

E perciò

$$T_x + T'_x \beta^{-1} + T''_x \beta^{-2} + \text{ecc.} \times \frac{1 + a'_x \beta^{-1} + a''_x \beta^{-2}}{1 + b'_x \beta^{-1}}$$

$$= T_{x+1} + T'_{x+1} \cdot \beta^{-1} + \text{ecc.},$$

dalla quale si ricavano queste equazioni

$$T_{x+1} - T_x = 0,$$

$$T'_{x+1} - T'_x + b'_x T_{x+1} - a'_x T_x = 0,$$

$$T''_{x+1} - T''_x + b'_x T'_{x+1} - a'_x T'_x - a''_x T_x = 0,$$

$$T'''_{x+1} - T'''_x + b'_x T''_{x+1} - a'_x T''_x - a''_x T'_x = 0,$$

ecc. ecc.

Da queste, integrate che siano, ricaviamo

$T_x = C$ costante

$T'_x = C\Sigma a'_x - C\Sigma b'_x$;

$$T''_x = C\Sigma a''_x + \Sigma a'_x T'_x - \Sigma b'_x T'_{x+1} = C\Sigma a''_x$$
$$+ C\Sigma a'_x \Sigma a'_x - C\Sigma a'_x \Sigma b'_x - C\Sigma b'_x \Sigma a'_{x+1}$$
$$+ C\Sigma b'_x \Sigma b'_{x+1} \text{ ecc.}$$

Il nostro integrale sarà adunque così espresso

$$z_{x,y} = n_{x-1} \cdot n_{x-2} \cdots n_1 \{C\phi(y+x-1)$$
$$+ T'_x \phi(y+x-2) + T''_x \phi(y+x-3) + \text{ecc.}\}.$$

La costante C è $=1$, come può vedersi facendo $\beta = 0$ nella serie che abbiamo supposto rappresentare il valore di quel prodotto.

Se fosse $a''_x = 0$, allora avremmo

$T_x = 1$

$T'_x = \Sigma a'_x - \Sigma b'_x$

$T''_x = \Sigma a'_x T'_x - \Sigma b'_x T'_{x+1}$

$T'''_x = \Sigma a'_x T''_x - \Sigma b'_x T''_{x+1}$ ecc.;

e se di più fosse ancora $b'_x = 0$, cioè la frazione complessa si riducesse ad $1 + a'_{x-1} \beta^{-1}$, allora sarebbe

$T_x = 1$

$T'_x = \Sigma a'_x$

$T''_x = \Sigma a'_x \Sigma a'_x$.

$T''' = \Sigma a'_x \Sigma a'_x \Sigma a'_x$ ecc.

In questo caso è facile vedere che la serie terminerà dopo il termine $T^{(x-1)} \beta^{-x+1}$ inclusivamente: in fatti questo termine $T_x^{(x-1)}$ conterrà $x-1$ segni sommatorj che appartengono ad a_x. Ora quando vi è un solo segno sommatorio come Σa_x, la serie, cui questa somma è eguale, comincia da a_{x-1}: quando vi sono due segni sommatorj, comincia da a_{x-2} ecc.; quando adunque vi sono x segni sommatorj, comincia da a_{x-x} che si considera zero, chè supponiamo che i prodotti comincino da a_1; l'integrale adunque finirà al termine $T_x^{(x-1)}\phi(y)$.

§ 108. Quando i coefficienti di una equazione a differenze finite e parziali sono funzioni di più variabili, l'equazione non può integrarsi che per certe determinate forme di coefficienti.

Sia, per esempio, da integrarsi l'equazione del secondo ordine

$$z_{x,y} + m_y \cdot n_x \cdot z_{x+1,y} + p_x \cdot z_{x,y+1} + l_y \cdot n_x \cdot z_{x+1,y+1} = 0,$$

nella quale m_x, n_x, p_y, l_y sono funzioni rispettivamente delle variabili y, x.

Per integrare questa equazione io faccio $z_{x,y} = \omega_x \cdot u_{x,y}$, essendo ω_x una funzione dell'x da determinarsi, ed $u_{x,y}$ una funzione delle due x, y, egualmente da determinarsi; sostituisco nella proposta, e dividendola per ω_x ho

$$u_{x,y} + m_y \cdot \frac{n_x \omega_{x+1}}{\omega_x} u_{x+1,y} + p_y \cdot u_{x,y+1}$$

$$+ l_y \cdot \frac{n_x \omega_{x+1}}{\omega_x} \cdot z_{x+1,y+1} = 0,$$ la quale,

determinando ω_x in maniera che sia $\frac{n_x \cdot \omega_{x+1}}{\omega_x} = 1$,

(ciò che è sempre possibile) diviene

$$u_{x,y} + m_y \cdot u_{x+1,y} + p_y \cdot u_{x,y+1} + l_y \cdot u_{x+1,y+1} = 0.$$

Questa equazione, avendo i coefficienti funzioni di una sola variabile, appartiene all' equazioni trattate al § 104.

§ 109. Si potrebbero trovare altre forme capaci di essere completamente integrate; noi però ci tratterremo soltanto a parlare dell' integrazione di alcune nuove equazioni da nessuno finora trattate, e per le quali non sono sufficienti i metodi d' integrazione conosciuti; queste equazioni si applicano direttamente alla teorica delle sorti.

Abbiasi l' equazione

$$(a) \ldots . z_{x,y} = \frac{a_y}{m_x} z_{x-1,y-1} + \frac{n_{x-y}}{m_x} z_{x-1,y}$$

nella quale a_y, m_x, n_{x-y} sono funzioni date dell' y, dell' x e dell' $x-y$ rispettivamente.

Per integrarla facciamo

$$z_{x,y} = \frac{\nabla a_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \delta^x \beta^y,$$ essendo

$$\nabla a_y = a_y \cdot a_{y-1} \cdot a_{y-2} \ldots . a_1,$$

$\nabla n_{x-y} = n_{x-y} \cdot n_{x-y-1} \cdot n_{x-y-2} \cdot \ldots\ldots n_1$

$\nabla m_x = m_x \cdot m_{x-1} \cdot m_{x-2} \cdot \ldots\ldots m_1$

e δ, β due costanti indeterminate.

Avremo allora, facendo le opportune sostituzioni,

$$\frac{\nabla a_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \delta^x \beta^y = \frac{a_y \nabla a_{y-1} \cdot \nabla n_{x-y}}{m_x \nabla m_{x-1}} \delta^{x-1} \beta^{y-1}$$

$$+ \frac{n_{x-y} \cdot \nabla a_y \cdot \nabla n_{x-y-1}}{m_x \nabla m_{x-1}} \delta^{x-1} \beta^y,$$

equazione che divisa pel fattore comune

$\frac{\nabla a_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x} \delta^{x-1} \beta^{y-1}$ diviene $\delta\beta = 1 + \beta$.

Da quest' ultima equazione fra δ e β otteniamo

$\beta = (\delta - 1)^{-1} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \delta^{-1}\right)^{-1}$, e perciò

$$\beta^y = \delta^{-y} + y\delta^{-y-1} + \frac{y(y+1)}{2}\delta^{-y-2}$$

$$+ \frac{y(y+1)(y+2)}{2 \cdot 3}\delta^{-y-3} + \text{ecc.}:$$

sarà dunque

$$z_{x,y} = \frac{\nabla a_y \cdot \nabla n_{x-y}}{\nabla m_x}\Big\{\delta^{x-y} + y\delta^{x-y-1}$$

$$+ \frac{y(y+1)}{2}\delta^{x-y-2} + \frac{y(y+1))y+2}{2 \cdot 3}\delta^{x-y-3}\text{ecc.}\Big\};$$

Ed introducendo la funzione arbitraria in vece dell' indeterminata δ^{x-y}, avremo

$$z_{x,y}=\frac{\nabla\alpha_y\cdot\nabla n_{x-y}}{\nabla m_x}\Big\{\phi(x-y)+y\phi(x-y-1)$$

$$+\frac{y(y+1)}{2}\ \phi(x-y-2)+\text{ecc.}\Big\}.$$

Questa espressione sarà l' integrale dell' equazione proposta.

Per determinare la funzione arbitraria facciamo $y=0$, ed avremo (la quantità $\nabla\alpha_y$ diviene allora $\nabla\alpha_0$ ed è eguale all' unità)

$$z_{x,0}=\frac{\nabla n_x}{\nabla m_x}\phi(x),\ \text{dunque}\ \phi(x)=\frac{\nabla m_x}{\nabla n_x}z_{x,0},\ \text{ed}$$

in conseguenza

$$z_{x,y}=\frac{\nabla\alpha_y\cdot\nabla n_{x-y}}{\nabla m_x}\Big\{\frac{\nabla m_{x-y}}{\nabla n_{x-y}}z_{x-y,0}+$$

$$y\frac{\nabla m_{x-y-1}}{\nabla n_{x-y-1}}z_{x-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla m_{x-y-2}}{\nabla n_{x-y-2}}z_{x-y-2,0}\ \text{ec.}\Big\}.$$

Abbiamo detto qui sopra che $\nabla\alpha_0=1$, in fatti

$$\nabla\alpha_{y-p}=\alpha_{y-p}\cdot\alpha_{y-p-1}\cdot\alpha_{y-p-2}\ldots\ldots\alpha_2\cdot\alpha_1,$$

ovvero $\nabla\alpha_{y-p}=\dfrac{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdot\alpha_{y-2}\ldots\ldots\alpha_2\cdot\alpha_1}{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\ldots\ldots\alpha_{y-p+1}}$,

e facendo $p=y$,

$$\nabla\alpha_{y-y}=\nabla\alpha_0=\frac{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdot\alpha_{y-2}\ldots\ldots\alpha_2\cdot\alpha_1}{\alpha_y\cdot\alpha_{y-1}\cdot\alpha_{y-2}\ldots\ldots\alpha_2\cdot\alpha_1}=1.$$

§ 110. Abbiasi da integrare l' equazione fra quattro variabili

$$(b) \ldots\ldots z_{x,y,u} = \frac{g_y}{h_x} z_{x-1,y-1,u} + \frac{e_u}{h_x} z_{x-1,y,u-1}$$

$$+ \frac{f_{x-y-u}}{h_x} z_{x-1,y,u},$$

nella quale h_x, g_y, e_u, f_{x-y-u} sono funzioni rispettivamente delle $x, y, u, x-y-u$.

Facciamo $z_{x,y,u} = \frac{\nabla g_y \cdot \nabla e_u \cdot \nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x} \delta^x \beta^y \gamma^u$,

essendo

$$\nabla g_y = g_y \cdot g_{y-1} \ldots\ldots\ldots\ldots g_1$$

$$\nabla h_x = h_x \cdot h_{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots h_1$$

$$\nabla e_u = e_u \cdot e_{u-1} \ldots\ldots\ldots\ldots e_1$$

$$\nabla f_{x-y-u} = f_{x-y-u} \cdot f_{x-y-u-1} \ldots\ldots f_1,$$

ed δ, β e γ quantità costanti indeterminate.

Fatte le opportune sostituzioni, si ottiene fra le indeterminate suddette l'equazione $\delta\beta\gamma = \gamma + \beta + \beta\gamma$, dalla quale si ricava

$$\gamma = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta\beta}}, \text{ e perciò}$$

$$\gamma^u = \frac{1}{\delta^u} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta\beta}} \right)^u = \frac{1}{\delta^u} \left\{ 1 + \frac{u}{\delta} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{u(u+1)}{2\delta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) \right.$$

$$+\frac{u(u+1)(u+2)}{2\cdot 3\delta^3}\left(1+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}\right)+\text{ecc.}\Big\}:$$

sarà dunque

$$z_{x,y,u}=\frac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x}\delta^x\beta^y\gamma^u$$

$$=\frac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_y}\Big\{\delta^{x-u}.\beta^y+u\left(\delta^{x-u-1}\beta^y\right.$$

$$\left.+\delta^{x-u-1}\beta^{y-1}\right)+\frac{u(u+1)}{2}\left(\delta^{x-u-2}\beta^y+\right.$$

$$\left.2\delta^{x-u-2}\beta^{y-1}+\delta^{x-u-2}\beta^{y-2}\right)+\text{ecc.}\Big\}.$$

Ora sostituendo in vece dell' indeterminata $\delta^{x-u}\beta^y$, una funzione arbitraria $\phi(x-u,y)$; e quindi determinando il valore di questa funzione, avremo

$$z_{x,y,u}=\frac{\nabla g_y\cdot\nabla e_u\cdot\nabla f_{x-y-u}}{\nabla h_x}\Big\{\frac{\nabla h_{x-u}}{\nabla g_y\cdot\nabla f_{x-y-u}}z_{x-u,y,0}$$

$$+u\left(\frac{\nabla h_{x-u-1}}{\nabla g_y\cdot\nabla f_{x-y-u-1}}z_{x-u-1,y,0}\right.$$

$$\left.+\frac{\nabla h_{x-u-1}}{\nabla g_{y-1}\cdot\nabla f_{x-y-u}}z_{x-u-1,y-1,0}\right)$$

$$+\frac{u(u+1)}{2}\left(\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_y\cdot\nabla f_{x-y-u-2}}z_{x-u-2,y,0}\right.$$

$$+2\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_{y-1}\cdot\nabla f_{x-y-u-1}}z_{x-u-2,y-1,0}$$

$$+\frac{\nabla h_{x-u-2}}{\nabla g_{y-2}\cdot\nabla f_{x-y-u}}\cdot z_{x-u-2,y-2,0}\Big)+\text{ec.}\Big\}$$

che sarà l' integrale della nostra equazione.

§ 111. Per integrare l' equazione

$$(c)\ldots z_{x,y}=\frac{a_y}{c_{x+y}}z_{x,y-1}+\frac{e_x}{c_{x+y}}z_{x-1,y}$$

poniamo $z_{x,y}=\frac{\nabla a_y\cdot\nabla e_x}{\nabla c_{x+y}}\alpha^x\beta^y$ essendo al solito

$$\nabla a_y=a_y\cdot a_{y-1}\cdot a_{y-2}\cdots\cdot a_2\cdot a_1$$

$$\nabla e_x=e_x\cdot e_{x-1}\cdot e_{x-2}\cdots\cdot e_2\cdot e_1$$

$$\nabla c_{x+y}=c_{x+y}\cdot c_{x+y-1}\cdot c_{x+y-2}\cdots c_2\cdot c_1:$$

Facendo le opportune sostituzioni nell'equazione (c), e dividendola pel fattore comune a tutti i suoi termini, avremo fra α e β quest' equazione

$\alpha\beta=\alpha+\beta$, dalla quale si deduce $\beta=\left(1-\alpha^{-1}\right)^{-1}$, e perciò

$$z_{x,y}=\frac{\nabla a_y\cdot\nabla e_x}{\nabla c_{x+y}}\Big\{\alpha^x+y\alpha^{x-1}+\frac{y(y+1)}{2}\alpha^{x-2}$$

$$+\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}\cdot\alpha^{x-3}+\text{ecc.}\Big\}:$$

Introducendo ora la funzione arbitraria e determinandola come abbiamo fatto qui sopra per le equazioni (a), (b), s' avrà

$$z_{x,y}=\frac{\nabla a_y\cdot\nabla e_x}{\nabla e_{x+y}}\Big\{\frac{\nabla c_x}{\nabla e_x}z_{x,0}+y\frac{\nabla c_{x-1}}{\nabla e_{x-1}}z_{x-1,0}$$

$$+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla^{c}_{x-2}}{\nabla^{c}_{x-2}}z_{x-2,0}$$

$$\left.+\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}\cdot\frac{\nabla^{c}_{x-3}}{\nabla^{e}_{x-3}}z_{x-3,0}+\text{ec.}\right\}.$$

L' equazioni

$$(d)\ldots\ldots z_{x,y,u}=\frac{d_{y}}{h_{x+y+u}}z_{x,y-1,u}$$

$$+\frac{e_{x}}{h_{x+y+u}}z_{x-1,y,u}+\frac{f_{u}}{h_{x+y+u}}z_{x,y,u-1},$$

$$(e)\ldots\ldots z_{x,y}=\frac{m_{(x+y):2}}{h_{x}}z_{x-1,y-1}$$

$$+\frac{n_{(x-y):2}}{h_{x}}z_{x-1,y+1}$$

sono integrabili col medesimo metodo facendo per la prima

$z_{x,y,u}=\frac{\nabla^{d_{y}}\cdot\nabla^{e_{x}}\cdot\nabla^{f_{x}}}{\nabla^{h_{x+y+u}}}\alpha^{x}\beta^{y}\gamma^{u}$; e per la seconda

$z_{x,y}=\frac{\nabla^{m_{(x+y):2}}\cdot\nabla^{n_{(x-y):2}}}{\nabla^{h_{x}}}\alpha^{x}\beta^{y}$, ed operando come abbiam fatto per le altre equazioni.

Noi ci siamo trattenuti ad integrare le equazioni (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*) poichè esse danno la soluzione dei problemi sopra le probabilità quando questa probabilità è variabile: Allora quando la

probabilità è costante, sì fatti problemi erano stati risoluti da Lagrange (*Atti di Berlino* 1775). Nella nostra ipotesi non bastavano i metodi di quel gran geometra.

§ 112. L'equazioni che abbiamo integrate avevano i coefficienti funzioni dell'x e dell'y, ma di una determinata forma: la seguente

$$az_{x,y}+bz_{x+1,y+1}+\ldots pz_{x+m,y+m}=T$$

è integrabile in qualunque modo i coefficienti a, b, c ecc., ed il secondo membro T siano fatti delle variabili x, y. Per integrarla facciamo $x-y=u$, $x=\omega$; ed avremo $y=\omega-u$. Se adesso, in vece delle due variabili x, y, si sostituiscono, nell' equazione i loro valori ω, $\omega-u$, la funzione $z_{x,y}$ diverrà una funzione di u e di ω che noi rappresenteremo per $t_{\omega,u}$. Delle due variabili ω, u, la u non varia col variare di x e di y, poichè è eguale alla lor differenza, la quale è costante quando x e y crescono della medesima quantità: a, b, c, ecc., T divengono funzioni delle variabili ω, u che indicheremo con a', b', c', ecc. T'; si avrà dunque

$$a'\cdot t_{u,\omega}+b'\cdot t_{u,\omega+1}+\ldots\ldots+p'\cdot t_{u,\omega+m}=T'.$$

Ora è facile comprendere che in questa equazione possiamo supporre u costante, poichè la sua variazione è nulla: i coefficienti allora potranno considerarsi come funzioni di una sola variabile ω, e basterà integrare l'equazione in questa supposizione: in vece poi delle costanti che l'integrazione introduce, si porranno tante funzioni della variabile che è supposta costante, cioè tante funzioni di u, vale a dire di $x-y$.

Per esempio, prendiamo ad integrare l'equazione $z_{x,y}=xy^2z_{x-1,y-1}$, ovvero, facendo crescere le variabili di un' unità,

$$(x+1)(y+1)^2z_{x,y}-z_{x+1,y+1}=0.$$

Ponendo in quest'ultima equazione ω in vece dell' x e $\omega - u$ in vece dell' y, abbiamo

$(\omega + 1)(\omega - u + 1)^2 t_{u,\omega} - t_{u,\omega+1} = 0$, la quale è una equazione a differenze finite del primo ordine, il cui integrale nella supposizione di u costante, è

$t_{u,\omega} = C \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \omega (1-u)^2 (2-u)^2 (3-u)^2 \ldots (\omega - u)^2$. Ponendo pertanto $\phi(x-y)$ in vece di C; x in vece di ω; $x-y$ in vece di u, si avrà

$z_{x,y} = \phi(x-y) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x (1-x+y)^2 (2+y-x)^2 (3-x+y)^2 \ldots y^2$, che è l' integrale completato con una funzione arbitraria $\phi(x-y)$.

§ 113. Proponiamoci l' equazione

$$x \cdot 2^x \cdot z_{x,y} + x z_{x,y+1} - (x^2-2) z_{x+1,y+4} = X,$$

essendo X una qualunque funzione di x.

Facendo $z_{x,y} = \alpha_x \cdot \beta^y + u_x$, avremo (dopo aver fatte le debite sostituzioni e aver diviso pel fattore comune β^y) per determinare α_x questa equazione

$$\alpha_{x+1} = \alpha_x \cdot \frac{x \cdot 2^x + x\beta}{(x^2-2)\beta^4}; \text{ ovvero}$$

$$\alpha_{x+1} = \alpha_x \cdot \frac{x}{(x^2-2)\beta^3}\left(1 + 2^x \beta^{-1}\right); \text{ onde}$$

$$\alpha_x = \frac{(x-1)(x-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{\{(x-1)^2-2\}\{(x-2)^2-2\}\ldots(1^2-2)} \beta^{-3(x-1)} \times$$

$$\left(1+2^{x-1} \cdot \beta^{-1}\right)\left(1+2^{x-2}\beta^{-1}\right)\ldots\left(1+2\beta^{-1}\right);$$

questa equazione, a tenore di ciò che è stato detto al § 107, diviene

$$a_x = \frac{(x-1)(x-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{\{(x-1)^2-2\}\{(x-2)^2-2\}\ldots(1^2-2)}\beta^{-3(x-1)} \times$$

$$\left(1+\beta^{-1}\Sigma 2^x + \beta^{-2}\Sigma 2^x \Sigma 2^x + \ldots\ldots\ldots + \beta^{-x+1}\Sigma 2^x \Sigma 2^x \Sigma 2^x \ldots\ldots \Sigma 2^x\right);$$

ora facendo le integrazioni, abbiamo

$$\Sigma 2^x = \frac{2^x}{2-1}$$

$$\Sigma 2^x \Sigma 2^x = \frac{2^{2x}}{(2^2-1)(2-1)}$$

$$\Sigma 2^x \Sigma 2^x \Sigma 2^x = \frac{2^{3x}}{(2^3-1)(2^2-1)(2-1)}$$

. . . .

$$\Sigma 2^x \Sigma 2^x \ldots\ldots \Sigma 2^x = \ldots\ldots\ldots \frac{2^{x(x-1)}}{\left(2^{x-1}-2\right)\left(2^{x-2}-1\right)\left(2^{x-3}-1\right)\ldots\left(2^2-1\right)\left(2-1\right)};$$

Dunque moltiplicando l' espressione di a_x per β^y, ed osservando che pel medesimo β^y possiamo prendere qualunque funzione arbitraria dell'y rappresentata con $\phi(y)$, avremo l' integrale della proposta così espresso

$$z_{x,y} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots 2 \cdot 1}{\{(x-1)^2-2\}\ldots(1^2-2)}\Big\{\phi\left(y-3(x-1)\right) + \frac{2^x}{2-1}\phi\left(y-3(x-1)-1\right) + \frac{2^{2x}}{(2^2-1)(2-1)}\phi\left(y-3(x-1)-2\right)+\ldots$$

$$+\frac{2^{x(x-1)}}{(2^{x-1}-1)(2^{x-2}-1)\ldots(2-1)}\times$$

$$\phi\left(y-3(x-1)-(x-1)\right)\Big\}+u_x.$$

La quantità poi u_x è data da questa equazione.

$x(2^x+1)u_x-(x^2-2)u_{x+1}=X$; sarà quindi

$$u_x=e^{\Sigma\log\frac{x(2^x+1)}{x^2-2}}\left(C+\Sigma e^{-\Sigma\log\frac{x(2^x+1)}{x^2-2}}\times\right.$$

$$\left.\frac{x^2-2}{x(2^x+1)}X\right).$$

CAPO XIV.

Applicazione alla soluzione di un problema

sulla partizione dei numeri.

§ 114. Intraprendo in questo capo a trattare di un altro genere di equazioni colle differenze finite, dalle quali dipende la soluzione dei problemi sulla *partizione dei numeri.*

Sia proposto di trovarsi il numero delle maniere nelle quali un numero qualunque y può essere la somma di x termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, ecc., o eguali o diseguali fra loro.

Disponendo per ordine tutte le maniere nelle quali il numero y può dividersi in x parti eguali, o diseguali, ne nasceranno le seguenti serie

$$\left.\begin{array}{l}
y = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (y - x + 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + (y - x) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - x - 1) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + 2 + (y - x - 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - x - 2) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 3 + 3 + (y - x - 3) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - x - 4) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}
\end{array}\right\} (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}
y = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + 2 + 2 + (y - 2x + 2) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + (y - 2x + 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + (y - 2x) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + 3 + (y - 2x) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 2x - 1) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + 4 + (y - 2x - 2) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 2y - 3) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}
\end{array}\right\} (b)$$

$$\left.\begin{array}{l}
y = 3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 3 + 3 + (y - 3x + 3) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x + 2) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x + 1) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 4 + 4 + (y - 3x + 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 5 + 5 + (y - 3x - 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 6 + (y - 3x - 2) \\
\qquad\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}
\end{array}\right\} (c)$$

In tutte quelle serie che sono composte di x termini, tutt' i numeri debbono essere combinati in tutte le maniere soddisfacenti, purchè il primo termine resti sempre lo stesso. Le lettere a, b, c, ecc. esprimono il numero delle serie corrispondenti, e quindi il numero delle maniere nelle quali il numero y può dividersi in x parti, è $= a + b + c +$ ecc.: ora è chiaro che a è il numero delle maniere nelle quali il numero $y - 1$ può dividersi in $x - 1$ parti, le altre serie b, c, ecc. sono tali che il valore di b, c, ecc. sarà lo stesso, se ad esse sostituiamo le seguenti serie composte di x termini.

$$\left.\begin{array}{l}
1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + 1 + (y - 2x + 1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + (y - 2x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 2x - 1) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + 2 + (y - 2x - 1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 2x - 2) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 3 + 3 + (y - 2x - 3) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 2x - 4) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}
\end{array}\right\} (b)$$

$$\left.\begin{array}{l}
2 + 2 + 2 + \ldots\ldots\ldots + 2 + 2 + (y - 3x + 2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 3x + 1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + 3 + (y - 3x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x + 1) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + 4 + (y - 3x - 2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x - 3) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}
\end{array}\right\} (c)$$

Si vedrà facilmente che tutte queste seconde serie rappresentano le maniere nelle quali il numero $y-x$ può dividersi in x parti: in fatti, ponendo nelle prime $y-x$ in luogo di y, ne nascono le seconde; dunque il numero delle maniere nelle quali il numero $y-x$ può dividersi in x parti, è $b+c+d+$ ecc.

Ciò premesso, se $z_{x,y}$ rappresenta il numero delle maniere nelle quali può il numero y dividersi in x parti, avremo per isciogliere il problema da integrare quest' equazione

$$z_{x,y}=z_{x-1,y-1}+z_{x,y-x}.$$

§ 115. Quest' equazione è di un genere differente da quelle che abbiamo integrate superiormente, poichè in quelle le differenze dell' x e dell' y erano costanti, ed in questa la differenza dell' y è variabile ed eguale ad x. Tal sorta d' equazioni ha insegnato il primo ad integrare il celebre dottor Paoli in una sua Memoria inserita nel tomo secondo della Società Italiana, e se ne è servito per la risoluzione dei problemi che risguardano la partizione dei numeri; problemi sciolti in parte con metodo meno diretto da Eulero nella sua introduzione all' Analisi degli infiniti.

Facciamo adunque l' integrazione della ritrovata equazione colle differenze finite e parziali; poniamo per questo $z_{x,y}=a_x\beta^y$, essendo a_x una funzione dell' x da determinarsi, e β una costante parimente da determinarsi; sostituendo nella proposta, e dividendo per β^y, avremo per determinare a_x quest' equazione a differenze finite

$$a_x=\frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-x}}\,a_{x-1}$$ cui soddisfà

$$a_x = \beta^{-x} \frac{1}{(1-\beta^{-1})(1-\beta^{-2})\dots(1-\beta^{-x})}.$$

Supponiamo adesso che il denominatore della frazione che moltiplica β^{-x}, sia decomposto nei suoi fattori di primo grado, e questi siano

$1-a\beta^{-1}$, $1-b\beta^{-1}$, $1-c\beta^{-1}$, $1-e\beta^{-1}$, ec., ciò che equivale a dire, siano a, b, c, ecc. le radici dell' equazione

$(1-\beta^{-1})(1-\beta^{-2})\dots\dots(1-\beta^{-x})=0$, o i valori che si troverebbero per β risolvendo queste equazioni $1-\beta^{-1}=0$, $1-\beta^{-2}=0$, $1-\beta^{-3}=0$ ecc.: avremo allora

$$a_x = \beta^{-x} \frac{1}{(1-a\beta^{-1})(1-b\beta^{-1})(1-c\beta^{-1})\dots}$$

Questa ultima frazione, che moltiplica β^{-x}, si riduca in serie ordinata con le potenze di β^{-1}. Per ottenere questa riduzione pongasi

$$\frac{1}{(1-a\beta^{-1})(1-b\beta^{-1})(1-c\beta^{-1})\dots} = A + A'\beta^{-1}$$
$$+ A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \text{ecc.},$$

e prendendo i logaritmi da ambe le parti, avremo

$$-\left\{l(1-a\beta^{-1}) + l(1-b\beta^{-1}) + l(1-c\beta^{-1}) + \dots\dots\right\}$$
$$= l(A + A'\beta^{-1} + A''\beta^{-2} + A'''\beta^{-3} + \text{ecc.}).$$

Ora quest' ultima equazione essendo vera per qualunque valore di β, sussisterà dunque ancora se

in vece di β si pone $\beta+\omega$, essendo ω una quantità qualunque: avremo pertanto

$$-\left\{ l\left(1-a(\beta+\omega)^{-1}\right)+l\left(1-b(\beta+\omega)^{-1}\right)\right.$$
$$\left.+l\left(1-c(\beta+\omega)^{-1}\right)+\ldots\right\}=l\left\{A+A'(\beta+\omega)^{-1}\right.$$
$$\left.+A''(\beta+\omega)^{-2}+A'''(\beta+\omega)^{-3}+\ldots\right\}:$$

sviluppati i due membri di questa equazione in serie secondo le potenze dell' indeterminata ω, i coefficienti delle rispettive potenze di ω s' eguaglieranno fra di loro, e prendendo l' equazione che ci danno i coefficienti della prima potenza, avremo questa nuova equazione

$$-\left\{\frac{a\beta^{-2}}{1-a\beta^{-1}}+\frac{b\beta^{-2}}{1-b\beta^{-1}}+\frac{c\beta^{-2}}{1-c\beta^{-1}}+\ldots\ldots\right\}=-$$
$$\frac{A'\beta^{-2}+2A''\beta^{-3}+3A'''\beta^{-4}+\ldots}{A+A'\beta^{-1}+A''\beta^{-2}+A'''\beta^{-3}+\text{ecc.}};\ \text{ovvero}$$

$$\frac{a}{1-a\beta^{-1}}+\frac{b}{1-b\beta^{-1}}+\frac{c}{1-c\beta^{-1}}+\ldots\ldots=$$
$$\frac{A'+2A''\beta^{-1}+3A'''\beta^{-2}+\ldots\ldots}{A+A'\beta^{-1}+A''\beta^{-2}+A'''\beta^{-3}+\ldots}.$$

Sviluppando ora in serie le frazioni del primo membro, avremo

$$a+b+c+\text{ecc.}+(a^2+b^2+c^2+\text{ecc.})\,\beta^{-1}$$
$$+(a^3+b^3+\text{ecc.})\,\beta^{-2}+(a^4+b^4+\text{ecc.})\,\beta^{-3}+\ldots$$
$$=\frac{A'+2A''\beta^{-1}+3A'''\beta^{-2}+\ldots\ldots}{A+A'\beta^{-1}+A''\beta^{-2}+A'''\beta^{-3}+\ldots};$$

e rappresentando con r la somma di tutte le prime potenze delle radici a, b, c, ecc., con r' quella dei quadrati, con r'' quella delle terze potenze, ed in generale con $r^{(m)}$ quella delle potenze $(m+1)^{esime}$, s' avrà

$$r+r'\beta^{-1}+r''\beta^{-2}+r'''\beta^{-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{A'+2A''\beta^{-1}+3A'''\beta^{-2}\ldots\ldots\ldots\ldots}{A+A'\beta^{-1}+A''\beta^{-2}+A'''\beta^{-3}+\ldots}.$$

Quest' ultima equazione ordinata con le potenze di β^{-1} ci dà le seguenti equazioni per determinare i coefficienti A, A', A'', A''' ecc.

$A'=Ar$

$2A''=A'r+Ar'$

$3A'''=A''r+A'r'+Ar''$

$4A''''=A'''r+A''r'+A'r''+Ar'''$ ecc.

La quantità A poi si determinerà facendo $\beta=0$ nel valore di a_x.

Dalle precedenti equazioni si ricava

$$\frac{A'}{A}=r$$

$$\frac{A''}{A}=\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}$$

$$\frac{A'''}{A}=\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

$$\frac{A''''}{A}=\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}$$

$$+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4};$$

e generalmente

$$\frac{A^{(m+1)}}{A} = \frac{r^{(m)}}{m+1} + r\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1}$$

$$+ \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r^{(m-3)}}{m+1}$$

$$+ \Big\{\frac{r'''}{4} + r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}$$

$$+ \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\Big\}\frac{r^{(m-4)}}{m+1}$$

$+$ ecc.

Ecco la legge che osservano fra loro i diversi termini di questa formola, la cui forma è

$$\frac{r^{(m)}}{m+1} + B\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + C\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + D\frac{r^{(m-3)}}{m+1}$$

$$+ E\frac{r^{(m-4)}}{m+1} + \ldots .$$

Si ottiene il coefficiente B del secondo termine, ponendo nel primo $m = 0$; il coefficiente C del terzo, facendo nel primo e nel secondo termine $m = 1$; e generalmente il coefficiente del termine $(\mu+2)^{esimo}$ facendo nei termini antecedenti $m = \mu$.

Trovati i valori dei coefficienti A', A'', A''', ecc., avremo

$$z_{x,y} = A\beta^{y-x} + A'\beta^{y-x-1} + A''\beta^{y-x-2}$$

$$+ A'''\beta^{y-x-3} + \text{ecc.};$$

e col ragionamento fatto (§ 86) troveremo

$$z_{x,y} = A\phi(y-x) + A'\phi(y-x-1)$$
$$+ A''\phi(y-x-2) + A'''\phi(y-x-3 + \text{ecc.},$$

ovvero, poichè facendo $\beta = 0$ abbiamo $A = 1$,

$$z_{x,y} = \phi(y-x) + A'\phi(y-x-1)$$
$$+ A''\phi(y-x-2) + A'''\phi(y-x-3) + \text{ecc.}$$

§ 116. Troviamo adesso gli effettivi valori di A', A'', A''', ecc.

Le diverse potenze delle radici dell' equazioni $\beta - 1 = 0$, $\beta^2 - 1 = 0$, $\beta^3 - 1 = 0$, $\beta^4 - 1 = 0$, ... $\beta^x - 1 = 0$, sono espresse dalla tavola seguente

Potenze	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª, ec.
Equazione 1ª	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2ª	0	2	0	2	0	2	0	2	0
3ª	0	0	3	0	0	3	0	0	3
4ª	0	0	0	4	0	0	0	4	0
5ª	0	0	0	0	5	0	0	0	0
6ª	0	0	0	0	0	6	0	0	0
ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

Così la prima fila verticale di questa tabella, sommata, ci dà il valore di r; la seconda, sommata, ci dà il valore di r'; la terza quello di r''; la quarta quello di r''', e così di seguito.

Ora è facile il vedere che la somma delle potenze m^{esime} delle radici di tutte queste equazioni ovvero la somma della colonna m^{esima} della tabella superiore potrà esprimersi colla formola

$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m}{m}$, purchè si

rigettino tutt' i termini fratti, e quei che sono maggiori di x: rappresentiamo questa formola così intesa col segno ∂m, ed avremo, qualunque sia m,

$r^{(m-1)} = \partial m$, e perciò $r^{(m)} = \partial(m+1)$.

Sostituendo adunque i respettivi valori di r, r', r'', r''' ecc. nelle qui sopra trovate espressioni dei coefficienti A', A''. A''' ecc., avremo

$$A' = \partial 1$$

$$A'' = \frac{\partial 2}{2} + \partial 1 \cdot \frac{\partial 1}{2}$$

$$A''' = \frac{\partial 3}{3} + \partial 1 \cdot \frac{\partial 2}{3} + \left(\frac{\partial 2}{2} + \partial 1 \cdot \frac{\partial 1}{2}\right)\frac{\partial 1}{3},$$

ed in generale

$$A^{(m)} = \frac{\partial m}{m} + \partial 1 \frac{\partial(m-1)}{m} + \left(\frac{\partial 2}{2} + \partial 1 \frac{\partial 1}{2}\right)\frac{\partial(m-2)}{m}$$

$$+ \left\{\frac{\partial 3}{3} + \partial 1 \frac{\partial 2}{2} + \left(\frac{\partial 2}{2} + \partial 1 \frac{\partial 1}{2}\right)\frac{\partial 1}{3}\right\}\frac{\partial(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Così nell' espressione

$\phi(y-x) + A'\phi(y-x-1) + A''\phi(y-x-2) + \ldots\ldots$

che si è trovata per $z_{x,\,y}$, la funzione indicata da ϕ è arbitraria, ed i. coefficienti A', A'' ecc. sono quantità numeriche conosciute.

Facendo $x = 1$, abbiamo $A' = A'' = A''' = \text{ecc.} = 1$: dunque

$z_{y,\,1} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4)$ + ecc., e ponendo $y-1$ in vece dell' y, sarà

$z_{y-1,\,1} = \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$

Ora sottraendo queste due equazioni, l' una dall'altra, avremo $z_{y,\,1} - z_{y-1,\,1} = \phi(y-1)$;

dalle quali si ricava

$\phi(y-2)=z_{y-1,1}-z_{y-2,1}$

$\phi(y-3)=z_{y-2,1}-z_{y-3,1}$

. . . .

$\phi(1)=z_{2,1}-z_{1,1}$

$\phi(0)=z_{1,1}-z_{0,1}$

$\phi(-1)=z_{0,1}-z_{-1,1}$

. . . .

$\phi(-p)=z_{-p+1,1}-z_{-p,1}$.

Ma dalla natura del problema si deduce

$z_{y,1}=1$ se y è positiva, e

$z_{y,1}=0$ se y è zero o negativa; dunque

$\phi(y-1)=z_{y,1}-z_{y-1,1}=1-1=0$

$\phi(y-2)=1-1=0$

$\phi(y-3)=1-1=0$

. . . .

$\phi(1)=1-1=0$

$\phi(0)=1-0=1$

$\phi(-1)=0$

$\phi(-2)=0$

. . . .

$\phi(-p)=0$,

cioè $\phi(y)$ è $=1$ nel solo caso dell' $y=0$, negli altri casi è sempre $=0$.

Avremo perciò $z_{x,y}=$ al coefficiente di $\phi(0)$, il quale se supponiamo che sia $A^{(m)}$, avremo $y-x-m=0$, cioè $m=y-x$, e quindi

$$z_{x,y} = \frac{\partial(y-x)}{y-x} + \partial 1 \frac{\partial(y-x-1)}{y-x}$$
$$+ \left(\frac{\partial 2}{2} + \partial 1 \frac{\partial 1}{2}\right) \frac{\partial(y-x-2)}{y-x}$$
$$+ \left\{\frac{\partial 3}{3} + \partial 1 \frac{\partial 2}{3} + \left(\frac{\partial 2}{2} + \partial 1 \frac{\partial 1}{2}\right)\frac{\partial 1}{3}\right\} \frac{\partial(y-x-3)}{y-x}$$
$$+ \text{ecc.}$$

§ 117. Cerchiamo, per esempio, in quante maniere il numero diciotto può dividersi in sedici parti; avremo $x = 16$, $y = 18$, $\partial(y-x) = \partial 2 = 2 + 1 = 3$: quindi $z_{18,16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$; queste due maniere sono le seguenti

$18 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3$

$18 = 1 + \ldots + 1 + 2 + 2.$

Cerchiamo adesso in quante maniere si può dividere il numero 9 in quattro parti; sarà $x = 4$, $y = 9$, $\partial(y-x) = \partial 5 = 1$, $\partial 4 = 4 + 2 + 1 = 7$, $\partial 3 = 3 + 1 = 4$, $\partial 2 = 2 + 1 = 3$, $\partial 1 = 1$. Onde il numero delle maniere dimandato sarà

$$z_{9,4} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}$$
$$+ \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$
$$+ \left\{\frac{7}{4} + \frac{4}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}$$
$$= \frac{8}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = 6.$$

Si può dunque comporre il numero 9 con quattro parti in sei differenti maniere, e sono le seguenti:

$9 = 1 + 1 + 1 + 6$

$9 = 1 + 1 + 2 + 5$

$9 = 1 + 2 + 2 + 4$

$9 = 1 + 1 + 3 + 4$

$9 = 1 + 2 + 3 + 3$

$9 = 2 + 2 + 2 + 3.$

Nella sopra citata memoria si troveranno molti importanti problemi dello stesso genere.

CAPO XV.

Applicazione alle probabilità nei giuochi di fortuna.

§ 118. Premetto alcune definizioni.

I. Chiamo *certezza* l' aspettativa che si ha di un evento, o il motivo di credere che questo evento succeda, quando egli dovendo accadere, non può accadere in una maniera diversa da quella che si brama. Se da un' urna che contenga solo palle nere, si vuole estrarre una palla nera, l' aspettativa di conseguire l' intento è una certezza.

II. Quest' aspettativa poi chiamasi *probabilità*, se quell' evento può anche avvenire in una maniera diversa dalla bramata. Così sarebbe se nell' urna mentovata si trovassero palle bianche e nere.

Questa probabilità poi sarà maggiore o minore a misura che maggiore o minore sarà il numero delle palle nere a confronto delle bianche; sarà però sempre minore della certezza.

III. Dunque la probabilità si potrà considerare come una frazione della certezza.

IV. La certezza si suole rappresentare con l' unità: dunque la probabilità lo sarà da una frazione dell' unità.

§ 119. Se in un' urna si trova un numero a di palle nere, ed un numero b di bianche, l' aspettativa per estrarre una palla nera starà a quella per estrarre una bianca come $a : b$. Indichiamo con m, n queste due aspettative, e sarà $m : n :: a : b$, quindi $mb = na$. Ora estraendo dall' urna una palla, io ho la certezza che questa palla sarà o nera o bianca: così l'aspettativa d' avere una palla nera, aggiunta all' aspettativa d' avere una palla bianca, sarà eguale alla certezza: dunque $m + n = 1$, poichè la certezza è indicata coll' unità.

Dalle due equazioni ritrovate fra m ed n si ricava

$m = \frac{a}{a+b}$, $n = \frac{b}{a+b}$: cioè la probabilità per ottenere una palla nera è eguale al numero delle palle nere diviso pel numero totale delle palle bianche e nere; ed egualmente la probabilità per ottenere una palla bianca è eguale al numero delle palle bianche diviso pel numero totale delle palle.

Nella stessa guisa si dimostrerebbe che se nell'urna fossero palle nere, bianche e rosse, ed i rispettivi numeri di esse a, b, c, la probabilità per estrarre una palla bianca sarebbe $= \frac{b}{a+b+c}$: quella per estrarne una nera sarebbe $= \frac{a}{a+b+c}$, e quella in fine per estrarre una palla rossa $= \frac{c}{a+b+c}$.

Di qui si ricava il primo principio per istimare la probabilità degli eventi.

V. Principio I. *La probabilità di un evento è eguale ad una frazione, il cui numeratore è formato dal numero dei casi favorevoli che possono far succedere questo evento, ed il cui denominatore è formato dal numero dei casi favorevoli aumentato del numero dei casi contrarj.*

Così se p indica il numero dei casi che possono condurre un evento; q il numero dei casi che possono non condurlo; la probabilità perchè l' evento succeda sarà $\frac{p}{p+q}$, e quella perchè non succeda, sarà $\frac{q}{p+q}$.

Se poi dal succedere un certo evento dipende il guadagno d' una determinata scommessa m, è facile concepire che prima che l' evento succeda, la quantità $\frac{p}{p+q}m$ sarà la porzione della scommessa m, che apparterrà a colui il quale attende questo evento con una probabilità $\frac{p}{p+q}$.

VI. Questa quantità $\frac{p}{p+q}m$ si chiama *sorte*: così se P è la probabilità che ha un giocatore di guadagnare una scommessa m; Pm è la sorte di quel giocatore.

§ 120. La probabilità di cui abbiamo parlato, dicesi probabilità *semplice*, per distinguerla da un' altra probabilità cui si dà il nome di *composta*, come ora spiegheremo.

VII. L' aspettativa o la probabilità di un evento il quale dipenda da alcuni altri eventi egualmente probabili, si chiama *probabilità composta*.

Così, per esempio, se in una stanza siano dieci urne, sette delle quali contengano cento palle rosse per ciascheduna, e che ciascuna delle altre tre contenga egualmente cento palle, sessanta delle quali siano nere e quaranta bianche; e se si supponga che un uomo, senza distinguere quali sono le urne con le palle rosse, e quelle con le palle bianche e nere, s' introduca in quella stanza per estrarre da quell' urna che più gli piace una palla nera; la probabilità per estrarre questa palla nera si chiama

composta, perchè dipende, 1.° dalla probabilità di sceglicre una delle urne ove si trovano le palle bianche e nere; 2.° dalla probabilità di estrarre la palla nera da essa.

Ora qual è la misura di questa probabilità composta?

Sia m la probabilità che vi è per estrarre da una di quelle tre urne la palla nera. Dieci essendo le urne, e tre sole quelle dalle quali l'uomo può estrarre la palla nera, ovvero quelle ciascuna delle quali gli dà la probabilità m, è evidente che l'aspettativa di scegliere una di queste urne è $\frac{3}{10}$, e che prima di scegliere un' urna, l'uomo che debbe estrarre la palla nera, non ha che tre decimi di speranza (VII) di guadagnare la probabilità m; egli in conseguenza, prima d'entrare nella stanza dell'urne, non ha per estrarre la palla nera che tre decimi della probabilità m, cioè $\frac{3}{10}m$ che nel nostro caso è $= \frac{3}{10} \cdot \frac{60}{100}$; e questa espressione è la misura di quella probabilità che abbiamo chiamata composta.

Dunque per avere in questo caso la misura della probabilità composta conviene moltiplicare la probabilità che vi è d'estrarre la palla nera da un' urna per la probabilità di scegliere fra tutte le urne una di quelle che contengono le palle bianche e nere.

VIII. *Principio secondo.* Se l'aspettativa di un evento dipende comunque da altri eventi, la probabilità della sua riuscita è eguale al prodotto della probabilità di ciascuno.

Così la probabilità P che accada un evento A, il quale non può accadere se non accade anche un evento B la cui probabilità è p, il quale evento B non può del pari accadere se non accade un evento

C, la cui probabilità è q, e così di seguito, si otterrà, moltiplicando le probabilità p, q, r, ecc., semplici fra loro, e sarà $P = pqr$, ecc.

Premesse queste cose veniamo alla soluzione dei problemi.

PROBLEMA I.

§ 121. Due giocatori A, B scommettono fra loro che chi di essi farà il primo un numero n di tiri favorevoli, guadagnerà la partita: manca a B un numero x di tiri favorevoli; ne manca ad A uno soltanto; si cerca la probabilità che ha ciascuno di essi di guadagnare.

Trovate le probabilità dei due giocatori, abbiamo subito la sorte di ciascuno di essi, moltiplicando la scommessa per la respettiva probabilità; e se la scommessa si rappresenta con l' unità, allora l'espressione analitica della probabilità è quella stessa della sorte.

Sia z_x funzione incognita dell' x, la probabilità di A. Supponiamo ora che si faccia un tiro: questo o è favorevole ad A, o è favorevle a B (imperocchè se è sfavorevole ad ambidue, non cangia la questione). Se è favorevole ad A, allora la partita è terminata, ed A guadagna: se è favorevole a B, allora dopo questo tiro la probabilità di A diviene z_{x-1}.

Indichiamo con p la probabilità che il tiro sia favorevole ad A; e con q la probabilità che il tiro sia favorevole a B.

Può adunque il giocatore A o guadagnare la certezza se il tiro gli è favorevole, o la probabilità z_{x-1} se il tiro è favorevole a B: egli adunque prima che il tiro segua (119, VI) ha diritto ad una porzione p della stessa certezza, e ad una porzione q della probabilità z_{x-1}: ma la certezza è

rappresentata (IV) con l' unità, dunque avremo l' equazione

$z_x = p + qz_{x-1}$: ovvero $-qz_x + z_{x+1} = p$,

dall' integrazione della quale dipenderà la soluzione del problema.

Paragonando adesso questa equazione con quella del § 39, avremo

$$z_x = q^{x-1}\Sigma\frac{p}{q^x} = Cq^{x-1} + q^{x-1}\Sigma\frac{p}{q^x};$$

$z_x = Cq^{x-1} + \frac{p}{1-q}$. Onde determinare la costante C, s'osservi che se $x = 1$, cioè se manca a B un solo colpo, allora la probabilità di A per guadagnare è la stessa probabilità p; dal che si ricava

$p = C + \frac{p}{1-p}$, e quindi $C = -\frac{pq}{1-q}$: sarà dunque

$z_x = \frac{p}{1-q} - \frac{p}{1-q}q^x$; rappresentando ora con ω_x la probabilità di B, un ragionamento simile a quello fatto per A, ci darà $\omega_x = q\omega_{x-1}$, e quindi $\omega_x = Cq^x$: ora $x = 1$, dà $\omega_x = q$; dunque $C = 1$, perciò $\omega_x = q^x$. Se q fosse eguale ad $1-p$, allora senza cercare direttamente la probabilità di B, si vedrà che questa è $= 1 - z_x$.

Supponendo $p = q = \frac{1}{2}$, abbiamo $z_x = 1 - \frac{1}{2^x}$;

e la probabilità che avrà B, sarà $\frac{1}{2^x}$.

Poniamo, per esempio, $x = 3$, ed avremo

$z_x = z_3 = \frac{7}{8}$: così A avrà $\frac{7}{8}$ di probabilità di vincere la partita, e B ne avrà $\frac{1}{8}$.

A questo stesso problema se ne riduce un altro, per quanto in apparenza sembri diverso.

Supponendo che la probabilità d' avere un evento sia p, quella d' avere l' evento contrario q, si dimanda quale è la probabilità d'avere quell' evento almeno una volta in x tiri, o, per ispiegarsi più semplicemente, supponendo che in un' urna trovisi un numero b di palle bianche, un numero c di palle nere, si cerca la probabilità d' estrarre almeno una palla bianca in x estrazioni.

Si suppone però che ad ogni tiro sia rimessa nell' urna la palla estratta, onde resti sempre lo stesso numero di palle bianche e nere.

Facile, ora, si è il comprendere che la probabilità d' estrarre una palla bianca in x estrazioni, è la probabilità di vincere una partita quando manca a me un sol tiro favorevole, e ne mancano x al mio contrario, e questa è stata calcolata nel problema superiormente risoluto; così (119, V) facendo $p = \frac{b}{b+c}$, $q = \frac{c}{b+c}$, avremo

$$z_x = 1 - \left(\frac{c}{b+c}\right)^x.$$

Si domanda, per esempio, qual probabilità vi è di ottenere il numero 6 tirando un dado di sei facce tre volte?

Si faccia nella formola superiore $b = 1$, $c = 5$, ed avremo $z_3 = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$; e la

probabilità di non avere il 6 sarà $\frac{125}{216}$: le due probabilità, cioè quella di averlo, e quella di non l'avere, staranno tra loro come 91 : 125 :: 3 : 4 circa.

Per farne un altro esempio, si domandi la probabilità d'ottenere il numero 8 tirando due dadi quattro volte.

Avremo in questo caso $b = 5$, $c = 31$, $x = 4$, e quindi $z_4 = \frac{36^4 - 31^4}{36^4} = \frac{756095}{1679616} = 0,45$ circa.

Accade spesso nella società che scommettendo due giocatori per vincere una certa partita, vogliono fra loro dividere la scommessa prima d'aver terminata la detta partita: per sapere in questo caso qual porzione di scommessa tocca a ciascuno, altro non si fa (119, VI) che, determinata la probabilità che aveva ciascuno di vincere la partita, moltiplicare per questa la quantità ch' esprime la scommessa; il prodotto sarà allora la porzione della scommessa che a ciascuno appartiene. Così supponendo che Tizio e Cajo, le cui abilità nel giuoco siano eguali, scommettano cinquanta scudi per ciascuno, e che mancando a Tizio un sol colpo favorevole per vincere la partita, e a Cajo tre colpi, essi, non volendo continuare a giuocare, propongano di dividersi la scommessa fra loro, la parte che debbe toccare a Tizio sarà $\frac{7}{8} \cdot 100$ scudi, e la parte di Cajo $\frac{1}{8} \cdot 100$.

PROBLEMA II.

§ 122. Avvi in un' urna un numero m di palle bianche, un numero n delle nere: Tizio e Cajo fanno scommessa, il primo dicendo che usciranno dall' urna a palle bianche avanti che escano b palle

nere; ed il secondo sostiene il contrario. Manca a Tizio una palla bianca perchè ei vinca; ne manca un numero x a Cajo: supponendo che le palle estratte non si ripongano nell' urna, si chiede quale è la probabilità dei due giocatori?

Ecco i dati del problema.

	N.° delle palle bianche . . . . . $=m$	Prima di cominciare il giuoco
	N.° delle palle nere. . . . . . $=n$	
	N.° totale delle palle . . . . . $=m+n$	
Essendo il giuoco nello stato che vuole il problema.	N.° delle palle bianche estratte $=a-1$	
	N.° delle residue nell' urna . $=m-a+1$	
	N.° delle palle nere estratte. $=b-x$	
	N.° delle residue . . . . $=n-b+x$	
	N.° totale delle palle residue nell' urna . . . . $=m+n-a-b+x+1$.	

La probabilità che i giocatori hanno in questa situazione per estrarre una palla bianca (119, V) è $p=\frac{m-a+1}{m+n-a-b+x+1}$: quella per estrarre la palla nera è $q=\frac{n-b+x}{m+n-a-b+x+1}$.

Il medesimo raziocinio che si è fatto pel problema I, ci dà questa equazione

$$z_x=\frac{m-a+1}{m+n-a-b+x+1}+\frac{n-b+x}{m+n-a-b+x+1}z_{x-1}$$

colle differenze finite del primo ordine, e coi coefficienti variabili.

Facciamo $m-a+1=\alpha$,

$m+n-a-b+1=\beta$, $n-b=\alpha'$, e l' equazione prenderà questa forma $z_x=\frac{\alpha}{\beta+x}+\frac{\alpha'+x}{\beta+x}z_{x-1}$.

Facendo crescere la x d' un' unità, essa equazione diviene

$$z_{x+1}=\frac{\alpha}{\beta+x+1}+\frac{\alpha'+x+1}{\beta+x+1}z_x,$$

che, paragonata con quella del § 39, avrà per integrale completo

$$\begin{aligned}z_x&=\frac{\alpha}{\beta+x}\\&+\frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha}{\beta+x-1}\\&+\frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta+x-2}\\&+\frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\cdot\frac{\alpha'+x-2}{\beta+x-2}\cdot\frac{\alpha}{\beta+x-3}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{\alpha'+x}{\beta+x}\cdot\frac{\alpha'+x-1}{\beta+x-1}\cdot\frac{\alpha'+x-2}{\beta+x-2}\ldots\ldots\frac{\alpha'+2}{\beta+2}\cdot\frac{\alpha'+1}{\beta+1}\cdot C.\end{aligned}$$

A determinare la costante C si faccia $x=1$, ed avremo

$z_1=\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\alpha'+1}{\beta+1}\cdot C$; ma la probabilità che ha Tizio di guadagnare la partita quando manca a Cajo un solo tiro, cioè z_1; è eguale alla stessa probabilità che ha Tizio per ottenere un tiro favorevole, cioè $=\frac{m-a+1}{m+n-a-b+2}$; dunque sostituendo per α, α', β, i loro valori, avremo

$$\frac{m-a+1}{m+n-a-b+2}=\frac{m-n+1}{m+n-a-b+2}+\frac{n-b+1}{m+n-a-b+2}C,$$

donde si ricava $C = 0$, e quindi l'integrale rimane privo di quell' ultimo termine e finisce al termine

$$+ \frac{a'+x}{\beta+x} \cdot \frac{a'+x-1}{\beta+x-1} \cdot \ldots \ldots \cdot \frac{a'+2}{\beta+2} \cdot \frac{a}{\beta+1}.$$

Per farne un esempio, sia $m = 10$, $n = 5$, $a = 4$, $b = 3$, ed $x = 2$: sarà $\alpha = 7$, $a' = 2$, $\beta = 9$: facendo le opportune sostituzioni, avremo

$$z_2 = \frac{7}{11} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{70+28}{110} = \frac{98}{110} = \frac{49}{55} = 0,\ 89$$

circa.

Se le palle estratte si fossero rimesse continuamente nell' urna, allora il valore di z_2 apparterrebbe al problema precedente.

PROBLEMA III.

§ 123. *Quale è la probabilità perchè un numero di palle prese in una sola volta a caso da un' urna sia pari ovvero caffo?*

Rappresentando con x il numero delle palle contenute nel recipiente, è chiaro che le due probabilità, tanto per prendere un numero di palle pari quanto per prendere un numero caffo, saranno due funzioni del numero totale delle palle: rappresentiamo adunque con y_x la somma dei casi nei quali il numero delle palle da prendersi può esser pari, e con z_x la somma di quei casi nei quali il numero che si prenderà può essere caffo.

Se si aumenta x d' un' unità, y_{x+1} esprimerà la somma dei casi pari, ed è chiaro che sarà eguale a $y_x + z_x$: poichè ogni caso dispari per l' aggiunta della nuova palla diviene pari; avremo dunque questa prima equazione

$$y_{x+1} = y_x + z_x.$$

Egualmente z_{x+1} sarà la somma di tutti i casi dispari dopo che alle palle contenute nel recipiente ne ho aggiunta una: questo numero sarà eguale a z_x numero dei casi dispari prima dell' aggiunta dell' unità, più y_x (poichè ogni numero pari, aggiuntavi l'unità, diviene caffo), più l'unità che è il caso per la nuova palla che si aggiunge; avremo perciò un' altra equazione

$z_{x+1} = z_x + y_x + 1$. Il problema adunque si risolve con l' integrazione di queste due equazioni

$y_x - y_{x+1} + z_x = 0$

$y_x + z_x - z_{x+1} = -1$.

Ora, a tenore di quanto abbiamo detto al § 58, elimineremo per mezzo delle due superiori equazioni z_x, ed otterremo un' equazione del secondo ordine

$y_{x+2} - 2y_{x+1} = 1$, la quale si riduce del primo, facendo scemare l' x d' una unità, e diviene $y_{x+1} - 2y_x = 1$; integrando quest' equazione, abbiamo $y_x = \frac{a^x}{2} \Sigma \frac{1}{a^x}$, essendo a la radice dell' equazione $a - 2 = 0$, pel che $a = 2$; dunque

$y_x = 2^{x-1} \Sigma 2^{-x} = 2^{x-1}\left(-2^{-x+1} + A\right), y_x = A2^{x-1} - 1.$

Per determinare la costante A, si osservi che quando $x = 1$, si ha $y_1 = 0$, perchè non vi sono casi pari, onde $A - 1 = 0$, $A = 1$; avremo dunque

$y_x = 2^{x-1} - 1.$

Sostituendo questo valore dell' y_x nella prima equazione, avremo $z_x = 2^{x-1}$. La somma pertanto di tutt' i casi possibili sarà

$z_x + y_x = 2^{x-1} + 2^{x-1} - 1 = 2^x - 1$; così la probabilità per prendere un numero pari di palle sarà

$\frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$; e quella per prenderne un numero caffo, $= \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$: vi sarà dunque sempre più probabilità pel numero caffo che pel numero pari.

Sia $x = 6$, ed avremo la probabilità per prendere un numero pari di palle $= \frac{2^5 - 1}{2^6 - 1} = \frac{31}{63}$: quella per prenderne un numero dispari $= \frac{32}{63}$.

PROBLEMA VI.

§ 124. *Manca a Tizio un numero* y *d' eventi favorevoli per vincere la partita: ne manca a Cajo un numero* x*: si domanda la probabilità che ha ciascuno di vincere.*

Cerchiamo la sorte di Tizio. La probabilità che ha Tizio di vincere dipende e dal numero y degli eventi che mancano ad esso, e dal numero x di quelli che mancano al suo contrario: questa sarà dunque una funzione di x e y: rappresentiamola con $z_{x,y}$.

Supponiamo che si faccia un tiro, e che ottengasi un evento: se questo è favorevole a Tizio, la

di lui probabilità diverrà $z_{x,y-1}$, e se è favorevole a Cajo, $z_{x-1,y}$.

Ora essendo q la probabilità perchè l'evento sia favorevole a Tizio, o perchè la di lui probabilità divenga $z_{x,y-1}$; e p la probabilità perchè sia favorevole a Cajo, o perchè la probabilità di Tizio divenga $z_{x-1,y}$, avremo (119, VI)

$$z_{x,y} = qz_{x,y-1} + pz_{x-1,y},$$

e dall'integrazione di questa equazione dipende la soluzione del problema.

Se in questa equazione facciamo aumentare x ed y dell'unità, e portiamo tutt'i termini da una sola parte, avremo

$qz_{x+1,y} + pz_{x,y+1} - z_{x+1,y+1} = 0$. Questa equazione paragonata con quella del § 88 ci dà $A = 0$, $C' = -1$, $B' = p$, $B = q$, e quindi

$$\beta = -\frac{q\alpha}{p-\alpha} = \frac{q}{1-\frac{p}{\alpha}}: \text{ sarà dunque}$$

$$\beta^y = q^y\left(1 + y\frac{p}{\alpha} + \frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}\cdot\frac{p^3}{\alpha^3} + \text{ecc.}\right),$$ e per conseguenza (§ 86)

$$z_{x,y} = q^y\left(z_{x,0} + ypz_{x-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}\cdot p^2 z_{x-2,0} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot 3}p^3\cdot z_{x-3,0} + \text{ecc.}\right).$$

Ora la probabilità del giocatore diviene certezza o eguale all'unità quando $y = 0$ ed x è positivo; e diviene nulla quando $x = 0$ ed y è positivo, dunque $z_{x,0} = 1$ quando $x > 0$; $z_{0,y} = 0$ quando $y > 0$:

Ciò premesso, facciasi nella trovata espressione di $z_{x,y}$, $x=0$, ed avremo

$$z_{0,y}=0=q^y\left(z_{0,0}+ypz_{-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}p^2z_{-2,0}\text{ ec.}\right),$$

la quale equazione ci dà

$$z_{0,0}=0,\ z_{-1,0}=0 \text{ ecc.}:$$

Pertanto si vede che la cercata probabilità è espressa con una serie di un numero finito di termini; l' ultimo termine è quello ove si trova $z_{1,0}$: essa è, cioè,

$$z_{x,y}=q^y\left(1+yp+\frac{y(y+1)}{2}p^2+\frac{y(y+1)(y+2)}{2\cdot3}p^3\right.$$
$$+\frac{y(y+1)(y+2)(y+3)}{2\cdot3\cdot4}p^4+\dots\dots\dots$$
$$\left.+\frac{y(y+1)(y+2)\dots(y+x-2)}{1\cdot2\cdot3\dots(x-1)}p^{x-1}\right).$$

Moltiplicando per questa espressione della probabilità il valore della scommessa, avremo (119, VI) la parte di questa scommessa che appartiene a Tizio, se la partita non si finisce; o la sorte di Tizio prima di terminare la partita.

Quella medesima formola ci dà la probabilità di vincere dell' altro giocatore col solo cangiare in essa x in y; y in x; p in q; q in p.

PROBLEMA V.

§ 125. *Abbiasi un' urna ove si trovano palle bianche e nere; si dimanda la probabilità che ha Tizio di vincere, quando scommette che, estraendo dall' urna successivamente un certo numero di palle, uscirà dall' urna medesima un numero* a *di palle nere prima che ne esca un numero* b *di palle bianche.*

Supponiamo che resti un numero y di palle nere ad estrarsi, prima che ne escano un numero x, e rappresentiamo la ricercata probabilità con $z_{x,y}$.

Se ogni palla estratta si riponesse di nuovo nell'urna, questo problema sarebbe in tutto è per tutto quello del § antecedente, ma non avendo luogo questa condizione, egli è diverso.

Sia n il numero delle palle nere che si trovano nell'urna al principio del giuoco; sia m il numero totale delle palle: sarà in conseguenza $m-n$ il numero delle bianche.

Quando restano un numero y di palle nere da estrarsi, avanti che ne esca un numero x, avremo:

Il numero delle palle nere restate nell'urna $=n-a+y$: quello delle bianche $=m-n-b+x$:

Il numero totale delle restate $=m-a-b+x+y$.

Sarà dunque il q del problema antecedente

$$=\frac{n-a+y}{m-a-b+x+y}\text{; ed il } p \text{ sarà } \frac{m-n-b+x}{m-a-b+x+y}\text{;}$$

dunque il problema sarà risoluto da questa equazione

$$z_{x,y}=\frac{n-a+y}{m-a-b+x+y}z_{x,y-1}+\frac{m-n-b+x}{m-a-b+x+y}z_{x-1,y}:$$

Facciamo

$n-a=d$, $m-n-b=e$, $m-a-b=h$, ed avremo

$$z_{x,y}=\frac{d+y}{h+x+y}z_{x,y-1}+\frac{e+x}{h+x+y}z_{x-1,y},$$

L'integrale di quest' equazione è quello dell'equazione (c) del § 111, nel quale si faccia

$a_y=d+y$; $e_x=e+x$; $c_{x+y}=h+x+y$;

Facendo pertanto

$\nabla(d+y)=(d+y)(d+y-1)(d+y-2)\ldots(d+1)$,

$\nabla(e+x)=(e+x)(e+x-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(e+1)$

$\nabla(h+x+y)=(h+x+y)(h+x+y-1)\ldots(h+1)$,

avremo

$$z_{x,y}=\frac{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x)}{\nabla(h+x+y)}\left\{\frac{\nabla(h+x)}{\nabla(e+x)}z_{x,0}\right.$$
$$+y\,\frac{\nabla(h+x-1)}{\nabla(e+x-1)}z_{x-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla(h+x-2)}{\nabla(e+x-2)}z_{x-2,0}+\ldots$$
$$\left.\frac{y(y+1)\ldots.(y+m-1)}{2\cdot3\ldots.m}\cdot\frac{\nabla(h+x-m)}{\nabla(e+x-m)}z_{x-m,0}+\text{ecc.}\right\}.$$

Ora (§ antecedente)

$z_{x,0}=z_{x-1,0}=\text{ecc.}=z_{1,0}=1$; $z_{0,0}=z_{-1,0}$ $=z_{-2,0}=\text{ecc.}=0$, dunque

$$z_{x,y}=\frac{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x)}{\nabla(h+x+y)}\left\{\frac{\nabla(h+x)}{\nabla(e+x)}\right.$$
$$+y\,\frac{\nabla(h+x-1)}{\nabla(e+x-1)}+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla(h+x-2)}{\nabla(e+x-2)}+\ldots..$$
$$\left.+\frac{y(y+1)(y+2)\ldots..(y+x-2)}{2\cdot3\ldots.(x-1)}\cdot\frac{\nabla(h+1)}{\nabla(e+1)}\right\}.$$

Ponendo in questa formola a in vece di y, b in vece di x, avremo la cercata probabilità.

PROBLEMA VI.

§ 126. *Si suppone che a ciascun tiro possano accadere tre eventi diversi che per più chiarezza indicheremo con* P, Q, R, *e che le probabilità di questi eventi siano rispettivamente* p, q, r; *si domanda la probabilità di vincere che ha un giocatore il quale scommette di ottenere l'evento* R *un numero* c *di volte, prima che l'evento* Q *sia ottenuto* b *volte, e l'evento* P a *volte.*

Indichiamo con $z_{x,y,u}$ la probabilità del giocatore, allorchè l'evento R resta da aversi un numero u di volte, prima che l'evento Q arrivi a un

numero y di volte, e l' evento P ad un numero x: la cercata probabilità sarà $z_{a,b,c}$.

Supponiamo che il giocatore faccia un tiro; questo tiro o può portare l' evento P, o l' evento Q, o l' evento R: la probabilità adunque $z_{x,y,u}$ può divenire $z_{x-1,y,u}$; ovvero $z_{x,y-1,u}$; ovvero $z_{x,y,u-1}$.

In conseguenza avremo per risolvere il problema questa equazione

$$z_{x,y,u} = pz_{x-1,y,u} + qz_{x,y-1,u} + rz_{x,y,u-1},$$

la quale si riduce ancora a quest' altra

$$pz_{x,y+1,u+1} + qz_{x+1,y,u+1} + rz_{x+1,y+1,u} - z_{x+1,y+1,u+1} = 0.$$

Facciasi per integrale $z_{x,y,u} = a^x \beta^y \gamma^u$; e sostituendo e dividendo per $a^x \beta^y \gamma^u$, avremo fra le indeterminate a, β, γ questa equazione $p\beta\gamma + qa\gamma + ra\beta - a\beta\gamma = 0$, dalla quale ri ricava

$$\gamma = \frac{-ra\beta}{qa + p\beta - a\beta} = \frac{r}{1 - \frac{p}{a} - \frac{q}{\beta}},$$ ed in conseguenza

$$\gamma^u = r^u \left\{ 1 + u\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{\beta}\right) + \frac{u(u+1)}{2}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{2pq}{a\beta} + \frac{q^2}{\beta^2}\right) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2\cdot 3}\left(\frac{p^3}{a^3} + \frac{3p^2q}{a^2\beta} + \frac{3pq^2}{a\beta^2} + \frac{q^3}{\beta^3}\right) + \text{ec.} \right\}$$

e ponendo $a^x \beta^y = \phi\,(x, y)$, si avrà

$$z_{x,y,u} = r^u \Big\{ \phi(x,y) + u\big(p\phi(x-1,y) + q\phi(x,y-1)\big) + \frac{u(u+1)}{2}\big(p^2\phi(x-2,y) + 2pq\phi(x-1,y-1) + q^2\phi(x,y-2)\big) + \text{ec.} \Big\}:$$

Facciamo $u = 0$, sarà allora $\phi(x,y) = z_{x,y,0}$; dunque

$$z_{x,y,u} = r^u \Big\{ z_{x,y,0} + u\big(pz_{x-1,y,0} + qz_{x,y-1,0}\big) + \frac{u(u+1)}{2} \cdot \big(p^2 z_{x-2,y,0} + 2pqz_{x-1,y-1,0} + q^2 z_{x,y-2,0}\big) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2 \cdot 3}\big(p^3 z_{x-3,y,0} + 3p^2 q z_{x-2,y-1,0} + 3pq^2 z_{x-1,y-2,0} + q^3 z_{x,y-3,0}\big) + \text{ecc.} \Big\}.$$

La natura della scommessa è tale che quando $u = 0$, ed x ed y sono maggiori di 0, il giocatore ha vinto; dunque $z_{x,y,0} = 1$ quando $x > 0$, $y > 0$.

Al contrario il giocatore ha perduto in questi tre casi: I.° quando $y = 0$, ed $x > 0$, $u > 0$; II.° quando $x = 0$, ed $y > 0$, $u > 0$: III.° quando $x = 0$, $y = 0$, ed $u > 0$: dunque

$$z_{x,0,u} = 0;\quad z_{0,y,u} = 0:\quad z_{0,0,u} = 0.$$

Da queste condizioni possiamo ricavare i valori di $z_{x,y,0}$ quando x, y sono nulli, quando sono negativi, e quando uno di essi è negativo o nullo.

In fatti facendo nella espressione superiormente trovata per $z_{x,y,u}$, $x = 0$, $y = 0$, avremo

$z_{0,0,u} = 0 = r^u \left\{ z_{0,0,0} + u(pz_{-1,0,0} + qz_{0,-1,0}) \text{ec.} \right\}$,

dalla quale

$z_{0,0,0} + u(pz_{-1,0,0} + qz_{0,-1,0}) + \text{ecc.} = 0$,

ed in conseguenza

$z_{0,0,0} = 0$; $z_{-1,0,0} = 0$; $z_{0,-1,0} = 0$, ecc.

Ponendo poi soltanto $x = 0$, avremo

$z_{0,y,u} = 0 = r^u \left\{ z_{0,y,0} + u(pz_{-1,y,0} + qz_{0,y-1,0}) \text{ec.} \right\}$;

e da queste due equazioni si vede che i valori di $z_{x,y,0}$ sono nulli quando $x = 0$, $y = 0$: quando $x = -m$, $y = -n$: quando $x = 0$, ovvero $y = 0$: quando $x = -m$, ovvero $y = -n$.

Per $-m$, $-n$ abbiamo inteso d'indicare dei numeri negativi.

Dunque l'espressione di $z_{x,y,u}$ sarà finita, e sarà rappresentata nella maniera seguente

$$z_{x,y,u} = r^u \left\{ 1 + u(p+q) + \frac{u(u+1)}{2}(p^2 + 2pq + q^2) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2 \cdot 3}(p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3) + \text{ecc.} \right\},$$

non continuando questa serie che fino ai termini nei quali le potenze di p saranno minori dell'x, e quelle di q minori dell' y.

Si vede come dovremo regolarci se gli eventi che possono accadere a ciascun tiro, fossero un maggior numero.

PROBLEMA VII.

§ 127. *Abbiasi un' urna con palle bianche, nere e rosse, e si dimandi qual probabilità vi è per supporre che si estrarrà prima dall' urna un numero* b *di palle*

bianche, *di quello che si estragga un numero* c *di rosse*, *ed un numero* a *di nere*.

Se ogni palla estratta fosse riposta di nuovo nell' urna prima che si facesse la successiva estrazione, allora il problema sarebbe lo stesso che quello sopra risoluto: egli è però ben diverso se questa condizione non vi è.

Siansi già estratte $a-y$ palle nere, $c-x$ palle rosse, $b-u$ palle bianche. Sia $z_{x,y,u}$ questa probabilità, la quale si converte in quella che si cerca facendo $x=c$, $y=a$, $u=b$.

Sia $=m$ il numero totale delle palle poste nell' urna:
Sia $=n$ il numero delle palle nere:
Sia $=l$ quello delle rosse:
Sarà $=m-l-n$ quello delle bianche:
Ora le palle nere restate nell' urna saranno $=n-a+y$,
Le rosse restate $=l-c+x$,
Le bianche $=m-n-l-b+u$.
Il numero totale delle palle restate $=m-b-c-a+x+y+u$.
Avremo adunque nel nostro caso

$$p=\frac{n-a+y}{m-b-c-a+x+y+u}$$

$$q=\frac{l-c+x}{m-b-c-a+x+y+u}$$

$$r=\frac{m-b-l-n+u}{m-b-c-a+x+y+u};$$

e l' equazione che risolve il problema, sarà

$$z_{x,y,u}=\frac{d+y}{h+x+y+u}z_{x,y-1,u}+\frac{e+x}{h+x+y+u}z_{x-1,y,u}+\frac{f+u}{h+x+y+u}z_{x,y,u-1}$$

essendo $d=n-a$; $e=l-c$; $f=m-b-l-n$; $h=m-b-c-a$.

Una tale equazione è un caso particolare della equazione (d) del § 111 : faremo dunque

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x)\cdot\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)}\,\alpha^x\beta^y\gamma^u,$$

essendo

$$\nabla(d+y) = (d+y)\cdot(d+y-1)\ldots\ldots(d+2)\cdot(d+1)$$
$$\nabla(e+x) = (e+x)\,(e+x-1)\ldots\ldots(e+2)\,(e+1)$$
$$\nabla(f+u) = (f+u)\,(f+u-1)\ldots\ldots(f+2)\,(f+1)$$
$$\nabla(h+x+y+u) = (h+x+y+u)\,(h+x+y+u-1)\ldots\ldots(h+2)\,(h+1).$$

Facendo ora le opportune sostituzioni nella proposta, e dividendo tutt' i di lei termini pei loro fattori comuni, avremo fra α, β, γ quest' equazione $\alpha\beta\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta$, dalla quale si ricava

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}.$$

Dunque

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x)\cdot\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)}\,\alpha^x\beta^y\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}\right)^u$$

$$= \frac{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x)\cdot\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)}\Big\{\alpha^x\beta^y$$
$$+ u\left(\alpha^{x-1}\beta^y + \alpha^x\beta^{y-1}\right) + \frac{u(u+1)}{2}\left(\alpha^{x-2}\beta^y\right.$$
$$\left. + 2\alpha^{x-1}\beta^{y-1} + \alpha^x\beta^{y-2}\right) + \frac{u(u+1)(u+2)}{3\cdot 3}\cdot\left(\alpha^{x-3}\beta^y\right.$$
$$\left. + 3\alpha^{x-2}\beta^{y-1} + 3\alpha^{x-1}\beta^{y-2} + \alpha^x\beta^{y-3}\right) + \text{ecc.}\Big\}:$$

sostituendo in questa espressione in vece di $\alpha^x\beta^y$

una funzione qualunque arbitraria $\phi(x, y)$, e determinando questa funzione per mezzo dell'equazione

$$\phi(x, y) = \frac{\nabla(h+x+y)}{\nabla(d+y)\nabla(e+x)} z_{x, y, 0}:$$

sarà dunque

$$z_{x,y,u} = \frac{\nabla(d+y)\nabla(e+x)\nabla(f+u)}{\nabla(h+x+y+u)} \left\{ \frac{\nabla(h+x+y)}{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x)} z_{x,y,0} \right.$$

$$+ u \left(\frac{\nabla(h+x+y-1)}{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x-1)} z_{x-1,y,0} + \frac{\nabla(h+x+y-1)}{\nabla(d+y-1)\cdot\nabla(e+x)} \times \right.$$

$$\left. z_{x, y-1, 0} \right) + \frac{u(u+1)}{2} \left(\frac{\nabla(h+x+y-2)}{\nabla(d+y)\cdot\nabla(e+x-2)} z_{x-2,y,0} \right.$$

$$+ 2 \frac{\nabla(h+x+y-2)}{\nabla(d+y-1)\cdot\nabla(e+x-1)} z_{x-1, y-1, 0}$$

$$\left. \left. + \frac{\nabla(h+x+y-2)}{\nabla(d+y-2)\cdot\nabla(e+x)} \cdot z_{x, y-2, 0} \right) + \text{ecc.} \right\}$$

La quale finisce a quei termini, ove in $z_{x, y, 0}$, x ovvero y è nullo o negativo. Nei termini poi che rimangono, conviene fare $z_{x, y, 0} = 1$, qualunque siano x e y, purchè siano maggiori di zero. Tutto questo si è dimostrato al § antecedente.

PROBLEMA VIII.

§ 128. *Un giocatore scommette d' ottenere un dato evento* b *volte almeno in un numero* a *di tiri: la probabilità d' ottenerlo a ciascun tiro essendo* p; *io domando la probabilità di vincere che ha questo giocatore.*

Indichiamo con $z_{x, y}$ questa probabilità, mentre restano ad esso x tiri da farsi, ed y volte da

ottenersi l' evento; è chiaro che la probabilità cercata al principio della partita sarà $z_{a,b}$: ora supponendo che si faccia un tiro, avremo giusta i principj sopra spiegati

$$z_{x,y} = pz_{x-1,y-1} + (1-p)z_{x-1,y},$$

che è una equazione a differenze finite e parziali del secondo ordine.

Questa equazione integrata ci dà

$$z_{x,y} = p^y \left(z_{x-y,0} + y(1-p)z_{x-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2} \cdot (1-p)^2 z_{x-y-2,0} + \text{ecc.} \right):$$

Sebbene questa espressione vada all' infinito, pure nel nostro caso le condizioni del problema la finiscono dopo un certo numero di termini.

In fatti è chiaro che il giocatore vince, ovvero che $z_{x,y} = 1$ quando $y = 0$, x essendo > 0; e ch' egli perde, ovvero che $z_{x,y} = 0$ quando $x = 0$, y essendo > 0; dunque $z_{x,0} = 1$ quando $x > 0$; $z_{0,y} = 0$ quando $y > 0$:

Si faccia ora nella ritrovata espressione di $z_{x,y}$, $x = 0$, ed avremo

$$z_{0,y} = 0 = p^y \left\{ z_{-y,0} + y(1-p)z_{-y-1,0} + \text{ecc.} \right\},$$

da cui si ricava $z_{-y,0} = 0$, $z_{-y-1,0} = 0$, ec., purchè $y > 0$.

Dunque l' espressione suddetta termina ove trovasi $z_{0,0}$: essa sarà pertanto

$$z_{x,y} = p^y \Big(z_{x-y,0} + y(1-p)z_{x-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{2}(1-p)^2 \times$$

$$z_{x-y-2,0} + \frac{y(y+1)(y+2)}{2 \cdot 3} (1-p)^3 z_{x-y-3,0} + \dots$$

$$+ \frac{y(y+1)\dots\dots(x-1)}{2 \cdot 3 \dots\dots (x-y)} (1-p)^{x-y} z_{0,0}):$$

Facendo ora $x=a, y=b, z_{0,0}=z_{1,0}=z_{2,0}=$ ecc. $=1$, avremo

$$z_{a,b} = p^b \Big(1+b(1-p) + \frac{b(b+1)}{2} (1-p)^2 + \frac{b(b+1)(b+2)}{2 \cdot 3} \times$$

$$(1-p)^3 + \text{ecc.} \dots + \frac{b(b+1)(b+2)\dots(a-1)}{2 \cdot 3 \dots (a-b)} (1-p)^{a-b}\Big).$$

Questa formola è stata trovata supponendo col metodo spiegato al § 86, $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y$, e determinando β per α in virtù dell'equazione $\alpha\beta = p + (1-p)\beta$.

Se noi avessimo determinato α per β, avremmo avuto (noi facciamo per semplicità $1-p=q$) questa seconda formola per $z_{x,y}$,

$$z_{x,y} = p^x z_{0,y-x} + xp^{x-1} q z_{0,y-x+1}$$

$$+ \frac{x(x-1)}{2} p^{x-2} q^2 \cdot z_{0,y-x+2} + \text{ecc.}$$

Essendo $x > y$, gl' indici $y-x$; $y-x+1$; $y-x+2$; ..... $y-x+(x-y-1)$ saranno tutti numeri negativi; l' indice $y-x+(x-y)$ sarà nullo, e quei che lo seguono, positivi.

Ora se nella prima formola facciamo $a=0$; $b=-1$; $b=-2$; $b=-3$ ecc., troveremo $z_{0,-1}=1$; $z_{0,-2}=1$; $z_{0,-3}=1$ ecc.; dunque

$$z_{x,y} = p^x + xp^{x-1} q + \frac{x(x-1)}{2} p^{x-2} q^2 + \dots\dots$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(y+1)}{2\cdot3\ldots\ldots(x-y)}\,p^y\cdot q^{x-y}:$$

facendo poi $x=a$, $y=b$, avremo

$$z_{a,b}=p^a+ap^{a-1}q+\frac{a(a-1)}{2}\,p^{a-2}q^2+\ldots\ldots$$

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(b+1)}{2\cdot3\ldots\ldots(a-b)}\,p^b q^{a-b}.$$

Se il problema avesse cercato il preciso numero b d' eventi nè più nè meno nel numero a di tiri, allora da quest' espressione avremmo dovuto togliere quella della probabilità d' ottenere un numero $b+1$ d' eventi almeno in a tiri, la quale è

$$z_{a,b+1}=p^a+ap^{a-1}q+\frac{a(a-1)}{2}\,p^{a-2}q^2+\ldots\ldots$$

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(b+2)}{2\cdot3\ldots\ldots(a-b-1)}\,p^{b+1}q^{a-b-1}.$$

La probabilità per ottenere precisamente il numero b d' eventi sarebbe allora (indicando per $Z_{a,b}$ questa probabilità)

$$Z_{a,b}=z_{a,b}-z_{a,b+1}=\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(b+1)}{2\cdot3\ldots(a-b)}\,p^b\cdot q^{a-b}.$$

Se facciamo $b=a-1$, abbiamo

$Z_{a,a-1}=\frac{a}{1}\cdot p^{a-1}q$; se facciamo $b=a-2$, abbiamo

$Z_{a,a-2}=\frac{a(a-1)}{2}\,p^{a-2}\cdot q^2$ ecc., e se facciamo $b=0$, abbiamo

$Z_{a,0}=q^a$: si vede adunque che se p rappresenta

la probabilità d' avere un evento, q quella d' aver l' evento contrario, ed m il numero delle volte che si fa un tiro, ovvero che uno si espone ad ottenere l' evento, facendo lo sviluppo del binomio $(p+q)^m$

$$(p+q)^m = p^m + mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{2} p^{m-2}q^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} \cdot p^{m-3}q^3 + \ldots + q^m,$$

il primo di lui termine rappresenterà la probabilità che tutti gli eventi siano favorevoli; il secondo rappresenterà la probabilità che gli eventi siano favorevoli ed uno contrario; il terzo quella che tutti gli eventi, eccettuati due, siano favorevoli ecc.; ed in fine l' ultimo termine darà la probabilità che tutti gli eventi siano contrarj.

Facciamo m eguale ad un numero impari $2n+1$, ed avremo

$$(p+q)^{2n+1} = p^{2n+1} + (2n+1)p^{2n}q + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{2\cdot 3\ldots n} p^{n+1}q^n$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{2\cdot 3\ldots n} p^n\cdot q^{n+1} + \ldots$$

$$+ (2n+1)pq^{2n} + q^{2n+1}.$$

Ora è facile vedere che in questo binomio sviluppato la somma dei termini fino alla potenza $p^{n+1}q^n$ inclusivamente rappresenta la probabilità che l' evento favorevole succeda $n+1$ volta almeno in $2n+1$ tiri; e che la somma del rimanente dei termini rappresenta la probabilità che l' evento contrario succeda esso $n+1$ volte almeno in $2n+1$ tiri; se dunque indichiamo queste due probabilità per E, F, avremo

$$E = p^{2n+1} + (2n+1)p^{2n}q + \frac{(2n+1)2n}{2}p^{2n-1}q^2 + \ldots$$
$$+ \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots.(n+2)}{2\cdot3\ldots.n}p^{n+1}q^n$$

$$F = q^{2n+1} + (2n+1)q^{2n}\cdot p + \frac{(2n+1)2n}{2}q^{2n-1}p^2 + \ldots$$
$$+ \frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots.(n+2)}{2\cdot3\ldots.n}q^{n+1}p^n,$$

Le due quantità E, F sono eguali quando $p = q$; ma se $p > q$ allora $E > F$; e se $p < q$ allora $E < F$. La differenza poi fra E ed F cresce col crescere il numero $2n + 1$, e col crescere la differenza fra p e q.

Supponiamo adesso che s' abbiano ($2n + 1$) urne, ciascuna delle quali contenga palle bianche e nere, e che p sia la probabilità d' estrarre una palla bianca, e q la probabilità per estrarre la nera.

Se noi prenderemo una palla da ciascun' urna, è chiaro che E rappresenterà la probabilità che fra $2n + 1$ palle estratte si ritrovino almeno $n + 1$ palle bianche, ed n palle nere; ed F rappresenterà la probabilità che fra $2n + 1$ palle estratte si ritrovino almeno $n + 1$ palle nere. Se p sarà maggiore di q, più grande che sarà il numero delle urne, più facile sarà che la pluralità nelle palle estratte sia favorevole alle bianche, e questa facilità crescerà col crescere il numero delle urne, e *viceversa*.

Trasportiamo ora tutto questo a cose più astratte, e supponiamo che vi sia un magistrato, consiglio, assemblea, o qualunque corpo morale composto di un numero $2n + 1$ di votanti per deliberare sopra una certa quistione.

Ciascun votante può dare il suo voto in favore della verità o in favore dell' errore. Sia p la probabilità che un votante si deciderà per la verità; q quella ch' ei (sebbene involontariamente) si deciderà per l' errore: l' espressione che abbiamo

trovata per E, ci darà la probabilità che la decisione risultante dalla ballottazione sarà conforme alla verità; ed F ci darà la probabilità che la decisione sarà conforme all' errore.

Dunque se $p > q$, cioè se i lumi di ciascun votante son tali che gli sia più difficile ingannarsi, di quello che vedere la verità, allora più che sarà grande il numero dei votanti, la decisione avrà più probabilità per essere conforme alla verità, ed in conseguenza per essere giusta. Al contrario se $p < q$, se, cioè, i lumi di ciascun votante saranno tali da farlo più facilmente cadere nell' inganno, allora più numerosa che sarà l' assemblea, più facilmente sarà ingiusta la di lei decisione, perchè contraria alla verità.

Per questo le assemblee numerosissime è necessario che siano composte di persone istruite sopra l' oggetto da deliberarsi; per questo le assemblee popolari sono sempre cattive se il popolo non è istruito sopra gl' interessi pei quali è chiamato a deliberare.

Per far un esempio, si domandi la probabilità che ha in favor della verità una decisione data a pluralità di voti da un magistrato composto di nove votanti, ciascun dei quali abbia $\frac{9}{10}$ di probabilità per risolvere in favor della verità ed $\frac{1}{10}$ in favor dell' errore.

Avremo in questo caso $m = 9$; $p = \frac{9}{10}$; $q = \frac{1}{10}$: dunque la probabilità che la decisione sia conforme alla verità, sarà

$$E = \left(\frac{9}{10}\right)^9 + 9\left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) + \frac{9 \cdot 8}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2$$
$$+ \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3}\left(\frac{9}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{9}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4,$$

la quale si riduce e diviene $E = \frac{99910908}{100000000}$;

e la probabilità che la decisione sia errata, sarà

$F = \frac{89092}{100000000}$: dunque

$E : F :: 99910908 : 89092 :: 1121 : 1$ circa.

Sarà dunque 1121 volte più facile che la decisione sia conforme alla verità che all' errore; e di 1121 decisioni ve ne sarà probabilmente una errata; ma non si trovano spesso magistrati così istruiti.

Noi abbiamo fatto questa breve digressione per far travedere ai nostri leggitori l'eccellenza del calcolo delle differenze finite col potersi applicare per fino alla stima dei giudizj degli uomini: del resto chi vorrà vedere in esteso simili applicazioni, può leggere la sublime opera, unica nel suo genere, del geometra Condorcet, che ha per titolo *Essay sur la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.*

PROBLEMA IX.

§ 129. *Un giocatore estraendo da un' urna, la quale contiene palle bianche e nere, un numero* a *di palle, scommette che fra queste se ne trovino almeno un numero* b *nere; quale è la probabilità di vincere che ha questo giocatore?*

Se le palle estratte si riponessero successivamente nell' urna, questo problema sarebbe in tutto e per tutto l'antecedente: senza questa condizione egli è diverso, poichè la probabilità d' estrarre una palla si varia da un tiro all' altro, variando ad ogni estrazione il numero delle palle che si trovano nell' urna medesima.

Sia m il numero totale delle palle:
Sia n il numero delle nere:
Sarà $m - n$ quello delle bianche.

Rappresentando al solito per $z_{x,y}$ la probabilità quando gli restano x tiri a fare ed y palle nere ad estrarsi, la probabilità ricercata sarà $z_{a,b}$.

Ora avendo il giocatore fatto $a-x$ estrazioni, il residuo numero totale delle palle nell' urna sarà $m-a+x$; ed avendo estratte $x-y$ palle nere, il residuo numero di esse sarà $n-b+y$; ed il residuo delle bianche sarà $m-a+x-n+b-y$.

La probabilità adunque d' avere nella seguente estrazione una palla nera, sarà

$p=\frac{n-b+y}{m-a+x}$; e quella d' averne una bianca, sarà

$$1-p=\frac{m-n-a+b+x-y}{m-a+x}.$$

Avremo allora, per risolvere il problema, l' equazione

$$z_{x,y}=\frac{n-b+y}{m-a+x}z_{x-1,y-1}+\frac{m-n-a+b+x-y}{m-a+x}z_{x-1,y},$$

ovvero

$$z_{x,y}=\frac{p+y}{r+x}z_{x-1,y-1}+\frac{p'+x-y}{r+x}z_{x-1,y},$$

essendo $p=n-b$; $p'=m-n-a+b$; $r=m-a$.

Paragonata questa equazione con l' equazione (a) del § 119, troveremo

$a_y=p+y$; $n_{x-y}=p'+x-y$; $m_x=r+x$, e perciò

$$z_{x,y}=\frac{\nabla(p+y)\cdot\nabla(p'+x-y)}{\nabla(r+x)}\left\{\frac{\nabla(r+x-y)}{\nabla(p'+x-y)}z_{x-y,0}\right.$$

$$+y\frac{\nabla(r+x-y-1)}{\nabla(p'+x-y-1)}z_{x-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{2}\times$$

$$\left.\frac{\nabla(r+x-y-2)}{\nabla(p'+x-y-2)}\cdot z_{x-y-2,0}+\text{ecc.}\right\},$$

27

ora essendo (§ 109) $z_{s,0}=1$ quando $s=0$, ovvero $s>0$; ed $z_{s,0}=0$ quando s è negativo, la serie seperiore diverrà

$$z_{x,y}=\frac{\nabla(p+y)\cdot\nabla(p'+x-y)}{\nabla(r+x)}\left\{\frac{\nabla(r+x-y)}{\nabla(p'+x-y)}\right.$$

$$+y\frac{\nabla(r+x-y-1)}{\nabla(p'+x-y-1)}+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{\nabla(r+x-y-2)}{\nabla(p'+x-y-2)}$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{y(y+1)\ldots(x-1)}{2\cdot3\cdot4\ldots(x-y)}\right\}.$$

Facendo effettivamente i prodotti indicati dalle caratteristiche ∇, e quindi ponendo a per x, b per y, otterremo la ricercata probabilità.

Da questa soluzione generale si ricava quella del problema antecedente.

Supponiamo in fatti che si ripongano nell' urna tutte le palle che s' estraggono; allora nei coefficienti dell' equazione non entrerà nè x, nè y, nè a, nè b; sarà $p=n$, $p'=m-n$, $r=m$, ed avremo perciò

$$\nabla(p+y)=p^y,\ \nabla(r+x)=r^x,\ \nabla(p'+x-y)=p'^{x-y};$$

dunque

$$z_{x,y}=\frac{p^y\cdot p'^{x-y}}{r^x}\left\{\frac{r^{x-y}}{p'^{x-y}}+y\frac{r^{x-y-1}}{p'^{x-y-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{y(y+1)}{2}\cdot\frac{r^{x-y-2}}{p'^{x-y-2}}+\text{ecc.}\right\},$$

Ove $\frac{p}{r}$ è ciò che al § antecedente è indicato con p; $\frac{p'}{r}$ ciò che è indicato con $1-p$.

Per farne un esempio, sia $m=20$, $n=10$, $b=8$, ed avremo $p=2$, $p'=8$, $r=10$; sarà dunque (facendo $x=a=10$, $y=b=8$)

$$z_{10,8}=\frac{\nabla(p+8)\cdot\nabla(p'+2)}{\nabla(r+10)}\left\{\frac{\nabla(r+2)}{\nabla(p'+2)}+8\cdot\frac{\nabla(r+1)}{\nabla(p'+1)}+\frac{8\cdot 9}{2}\cdot\right\}$$

$$z_{10,8}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 10\cdot 9}{20\cdot 19\cdot 18\ldots\ldots 12\cdot 11}\left\{\frac{12\cdot 11}{10\cdot 9}+8\frac{11}{9}+\frac{8\cdot 9}{2}\right\};$$

e riducendo $z_{10,8}=\frac{1059}{92\cdot 3\cdot 8}=0,011$ circa.

E se le palle estratte si riponessero nell' urna, s' avrebbe $p=\frac{1}{2}$, $1-p=\frac{1}{2}$, e quindi

$$z_{10,8}=\frac{1}{256}\left\{1+4+9\right\}=0,055 \text{ circa.}$$

I problemi II, V, VII e IX possono chiamarsi di *probabilità variabile*, poichè la probabilità varia da un tiro all' altro: non mi sembra che alcuno finora ne avesse date le soluzioni dirette, come aveva fatto La-Grange pei problemi IV, VI e VIII di probabilità costante.

PROBLEMA X.

§ 130. *Stimare la sorte del giuoco della bassetta.*

Per esercitare sempre più i miei lettori nella difficile arte di mettere in equazione i problemi sopra le sorti, non credo opera perduta il trattenermi a stimare la sorte del giuoco della bassetta.

Questo giuoco è stato calcolato ancora dal celebre Giacomo Bernouilli nella sua *Arte di congetturare*: la sagacità di cui fa uso in quell' analisi, è degna di un tanto uomo, poichè non conoscendosi allora il calcolo delle differenze finite, mancava a quel geometra il metodo diretto per sì fatte ricerche; ma le formole date da esso non potrebbero

servire per noi, poichè le nostre leggi di questo giuoco sono diverse da quelle supposte da Bernouilli.

Noi pertanto riprendendo la quistione da' suoi principj, adopereremo un metodo diretto, e quanto siamo per dire servirà di guida a chi vorrà intraprendere la stima della sorte in altri giuochi di fortuna.

Io suppongo che si conoscano le leggi di questo giuoco per le quali l'unico vantaggio del banchiere consiste nel riscuotere la metà della scommessa quando vengono i doppietti della carta giocata, e nell'essere favorevole al banchiere l'ultima coppia di carte che si sfogliano: cominceremo dal non considerare questo secondo vantaggio, al quale avremo riguardo in avvenire.

Sia $2x$ il numero delle carte che restano a sfogliarsi:

I. Supponiamo che la scommessa cada sopra la carta del re, e che vi sia una sola carta del re fra le $2x$ carte.

C' insegna la teorica delle combinazioni che le combinazioni binarie di $2x$ quantità sono $\frac{2x(2x-1)}{2}$, ovvero $x(2x-1)$: ora il numero delle carte, esclusa la carta del re, sarà $2x-1$, ed il numero delle combinazioni binarie che possono farsi con esse, sarà $(2x-1)(x-1)$, delle quali non ve n'è alcuna che contenga il re.

Le combinazioni poi in ciascuna delle quali può trovarsi la carta del re, sono $(2x-1)\cdot 1$; e le combinazioni nelle quali la carta del re può trovarsi due volte, sono $\frac{1(1-1)}{2}=0$.

Chiamando adunque P la probabilità che il re non si trovi nel primo binario di carte che si sfogliano, ed avvertendo che la probabilità è eguale al numero dei casi favorevoli diviso pel numero dei casi possibili, avremo

$$P = \frac{(2x-1)(x-1)}{x(2x-1)} = \frac{x-1}{x}.$$

Chiamando P' la probabilità che il re si trovi nel primo binario, sarà $P' = \frac{(2x-1)\,1}{x(2x-1)} = \frac{1}{x}$;

e finalmente chiamando P'' la probabilità che il re si trovi due volte nel primo binario, sarà $P'' = 0$.

II. Supponiamo adesso che nel numero $2x$ di carte si trovino due re.

Il numero delle carte fra le quali non si trovano i due re, sarà $2x-2$: le combinazioni binarie di queste carte saranno

$$\frac{(2x-3)(2x-2)}{2} = (x-1)(2x-3):$$

le combinazioni binarie nelle quali può trovarsi una volta la carta del re, saranno $(2x-2)\cdot 2$; e quelle nelle quali possono trovarsi due re, saranno $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$.

Chiamando adunque P, P', P'' le tre probabilità come sopra, avremo

$$P = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)},\ P' = \frac{(2x-2)\cdot 2}{x(2x-1)},\ P'' = \frac{1}{x(2x-1)}.$$

III. Supponiamo che nel numero $2x$ si trovino tre carte del re, e con un ragionamento simile troveremo

$$P = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)},\ P' = \frac{(2x-3)\cdot 3}{x(2x-1)},\ P' = \frac{3}{x(2x-1)}.$$

IV. In fine trovandosi quattro re fra il numero $2x$ di carte, sarà

$$P = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)},\ P' = \frac{(2x-4)\cdot 4}{x(2x-1)},\ P' = \frac{6}{x(2x-1)}.$$

Rammentiamo che P rappresenta sempre la probabilità che nella prima coppia di carte non si trovi un re; P' la probabilità che vi se ne trovi un solo; P'' la probabilità che vi se ne trovino due.

§ 131. Risolviamo ora le principali quistioni che possono proporsi sopra questo giuoco.

Prima questione:

Quale è la sorte del banchiere e del giocatore nella prima coppia di carte?

Rappresentiamo coll' unità la scommessa, ed indicando con P' la probabilità d' avere il re nella prima coppia, sarà $\frac{P'}{2}$ la probabilità che il re sia favorevole al banchiere: e la sua sorte sarà (119, VI) $= \frac{P'}{2} \cdot 1 = \frac{P'}{2}$: così essendo P'' la probabilità che la prima coppia abbia due re, o sia un doppietto, e vincendo in questo caso il banchiere la metà della scommessa, cioè $\frac{1}{2}$, sarà $P'' \cdot \frac{1}{2} = \frac{P''}{2}$ la sorte del banchiere in virtù del doppietto: dunque la sorte totale del banchiere sarà $\frac{P'+P''}{2}$.

Egualmente la probabilità che nella prima coppia di carte si trovi un re favorevole al giocatore è $\frac{P'}{2}$, e quindi la sua sorte in virtù di questo re sarà $\frac{P'}{2} \cdot 1 = \frac{P'}{2}$; e siccome, venendo un doppietto, il giocatore perde la metà della scommessa, che equivale a dire, vince $-\frac{1}{2}$, così per causa del doppietto la sua sorte sarà $P'' \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{P''}{2}$: dunque la sorte totale del giocatore sarà $\frac{P'-P''}{2}$.

Sostituendo adesso nelle trovate formole i diversi valori di P', P' avuti al § antecedente pei casi I, II, III e IV, avremo

Pel caso I. $\begin{cases} \text{Sorte del banch.} = \dfrac{1}{2x} \\ \text{Sorte del gioc.} = \dfrac{1}{2x} \end{cases}$

Pel caso II. $\begin{cases} \text{Sorte del banch.} = \dfrac{4x-3}{2x(2x-1)} \\ \text{Sorte del gioc.} = \dfrac{4x-5}{2x(2x-1)} \end{cases}$

Pel caso III. $\begin{cases} \text{Sorte del banch.} = \dfrac{3x-3}{x(2x-1)} \\ \text{Sorte del gioc.} = \dfrac{3x-6}{x(2x-1)} \end{cases}$

Pel caso IV. $\begin{cases} \text{Sorte del banch.} = \dfrac{4x-5}{x(2x-1)} \\ \text{Sorte del gioc.} = \dfrac{4x-11}{x(2x-1)} \end{cases}$

E sarà soddisfatta la prima quistione.

S' avverta che le suddette espressioni rappresentano ancora le probabilità del banchiere e del giocatore per vincere la scommessa nella prima coppia di carte.

§ 132. Seconda quistione:

Quale è la sorte del banchiere, e quale quella del giocatore quando si sfogliano tante carte finchè venga la carta del re, su cui cade la scommessa?

Risolviamo questa quistione nei quattro casi sopra considerati.

I caso. Sia z_x funzione dell' x la sorte del banchiere: u_x funzione dell' x la sorte del giocatore.

Nella prima coppia di carte può vincere il banchiere; può vincere il giocatore; può nessun vincere: in quest' ultimo caso le loro sorti si riducono a z_{x-1}; u_{x-1}: ora la probabilità (§ antecedente) che il banchiere vinca la scommessa nella prima coppia di carte, è $\frac{1}{2x}$; dunque la sua sorte pel caso che la scommessa finisca nella prima coppia, sarà $\frac{1}{2x} \cdot 1$, ovvero $\frac{1}{2x}$. La probabilità che il banchiere non vinca nè perda nella prima coppia, o che la sua sorte si riduca a z_{x-1}, o che esso vinca la quantità z_{x-1}, è (§ 129) $\frac{x-1}{x}$; dunque $\frac{x-1}{x} z_{x-1}$ sarà la sorte del banchiere, se la scommessa non finisce nella prima coppia: avremo adunque per rappresentare la sorte del banchiere $\frac{x-1}{x} z_{x-1} + \frac{1}{2x}$, e perciò

$$(1) \ldots . z_x = \frac{x-1}{x} z_{x-1} + \frac{1}{2x} :$$

lo stesso raziocinio ci dà

$$(2) \ldots , u_x = \frac{x-1}{x} u_{x-1} + \frac{1}{2x},$$

e dall'integrazione di queste due equazioni dipendono i valori di z_x, u_x.

Per integrare l'equazione (1) io faccio $xz_x = p_x$, ed ho $p_x = p_{x-1} + \frac{1}{2}$, onde $p_{x+1} = p_x + \frac{1}{2}$; $\Delta p_x = \frac{1}{2}$, $p_x = \frac{1}{2} \Sigma 1$, $p_x = \frac{1}{2} x + C$, e quindi

$z_x = \frac{1}{2} + \frac{C}{x}$: ora facendo $x = 1$, si ha

$z_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$, e $C = 0$, dunque $z_x = \frac{1}{2}$.

Nella stessa maniera troveremo $u_x = \frac{1}{2}$.

II caso. Sia z'_x la sorte del banchiere; u'_x la sorte del giocatore.

Nella prima coppia di carte può vincere il banchiere; può vincere il giocatore; può nessun di loro vincere. In quest' ultimo caso le loro sorti sono ridotte a z'_{x-1}, u'_{x-1}. Ora (§ antecedente) la probabilità che il banchiere vinca la scommessa nella prima coppia di carte, è $\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$; dunque la sorte di esso nel caso che la scommessa finisca nella prima coppia, sarà $\frac{4x-3}{2x(2x-1)} \cdot 1$, ovvero $\frac{4x-3}{2x(2x-1)}$. La probabilità che non venga alcun re nella prima coppia di carte, cioè che il banchiere non vinca nè perda nella prima coppia; o che la sua sorte si riduca a z'_{x-1}, o che esso vinca la quantità z'_{x-1}, è (§ 130) $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$; dunque $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1}$ sarà la sorte del banchiere se la scommessa non termina nelle due prime carte: dunque la sorte totale del banchiere sarà rappresentata da

$$\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1} + \frac{4x-3}{2x(2x-1)}:$$

dunque avremo

$$(3)\ldots z'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1} + \frac{4x-3}{2x(2x-1)}:$$

Un simile ragionamento fatto pel giocatore darà

$$(4)\ldots u'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} u'_{x-1} + \frac{4x-5}{2x(2x-1)}.$$

Per integrare l' equazione (3) facciasi $x(2x-1)z'_x = p'_x$, ed avremo da integrare

$$p'_x = p'_{x-1} + \frac{4x-3}{2}, \text{ e perciò}$$

$$p'_{x+1} = p'_x + \frac{4x+1}{2}, \text{ donde}$$

$$p'_x = \frac{1}{2}\Sigma(4x+1) = \frac{2x(x-1)+x}{2} = \frac{x(2x-1)}{2} + C:$$

sarà pertanto

$z'_x = \frac{x(2x-1)}{2x(2x-1)} = \frac{1}{2}$ poichè la costante trovasi eguale a zero.

Col medesimo ripiego integrando l'equazione (4) si trova $u'_x = \frac{2x-3}{2(2x-1)}$: d' ora in avanti non aggiungeremo costanti, poichè determinandole si troverebbero $= 0$.

III caso. Sia rappresentata da z''_x la sorte del banchiere, e da u''_x quella del giocatore: il medesimo ragionamento che abbiam fatto per gli altri due casi, applicato al caso presente, ci dà queste due equazioni a differenze finite del primo ordine per determinare z''_x, u''_x

$$(5)\ldots z''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} z''_{x-1} + \frac{3x-3}{x(2x-1)}$$

$$(6)\ldots\ldots u''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}\, u''_{x-1} + \frac{3x-6}{x(2x-1)}.$$

Per integrare l' equazione (5) poniamo $x(2x-1)z''_x = p_x$, ed avremo

$p_x = \frac{x-2}{x-1} p_{x-1} + 3x - 3$: facciamo anche

$(x-1)p_x = p'_x$ ed avremo

$p'_x = p'_{x-1} + (3x-3)(x-1)$, dalla quale

$p'_{x+1} = p'_x + 3x^2$: sarà dunque

$p'_x = 3\Sigma x^2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2}$;

$p_x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{2}$;

$z''_x = \frac{x(2x-1)}{2(2x-1)x} = \frac{1}{2}$:

Per integrare l' equazione (6) poniamo $x(2x-1)u''_x = q_x$, e questa diverrà

$q_x = \frac{x-2}{x-1} q_{x-1} + 3x - 6$; poniamo ora

$(x-1)q_x = q'_x$, ed avremo

$q'_x = q'_{x-1} + (3x-6)(x-1)$, dalla quale

$q'_x = \Sigma x(3x-3) = 3\Sigma x(x-1) = x(x-1)(x-2)$:

sarà dunque

$q_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{x-1} = \frac{x(x-2)}{1}$; $u''_x = \frac{x(x-2)}{x(2x-1)} = \frac{x-2}{2x-1}$.

IV caso. Egualmente per questo quarto caso indicando con z'''_x la sorte del banchiere, e con u'''_x la sorte del giocatore, avremo le due equazioni

$$(7)\ldots\ldots z'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} z'''_{x-1} + \frac{4x-5}{x(2x-1)}$$

$$(8)\ldots\ldots u'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} u'''_{x-1} + \frac{4x-11}{x(2x-1)},$$

le quali ridotte più semplici col medesimo ripiego ed integrate, ci danno

$$z'''_x = \frac{1}{2},\ u'''_x = \frac{(2x-1)(2x-3)-2(4x-5)}{2(2x-1)(2x-3)},\ \text{ovvero}$$

$$u'''_x = \frac{1}{2} - \frac{4x-5}{(2x-1)(2x-3)}.$$

Resta così soddisfatta la seconda quistione.

§ 133. Terza quistione:

Quale è la sorte del banchiere in virtù soltanto dei doppietti?

Ciò costituisce particolarmente il vantaggio che ha in questo giuoco il banchiere, e lo scapito che vi ha il giocatore; ed il doppio di questa quantità forma la differenza fra la sorte del banchiere e quella del giocatore.

La soluzione di questa quistione si potrebbe ricavare dalla considerazione delle sorti calcolate nel § antecedente, giacchè anche nella quistione attuale si suppone che la scommessa termini allorchè si sfoglia la carta su cui si scommetteva.

Pure considerandola indipendentemente da ciò che è detto al § citato, vedremo che indicando con z'_x questa sorte nel secondo caso, con z''_x la medesima sorte nel terzo caso, e con z'''_x la sorte nel quarto caso, abbiamo

II caso..... $z'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1} + \frac{1}{2x(2x-1)}$

da cui $z'_x = \frac{1}{2(2x-1)}$

III caso..... $z''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} z''_{x-1}$

$+ \frac{3}{2x(2x-1)} \ldots\ldots z''_x = \frac{3}{4(2x-1)}$

IV caso..... $z'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} z'''_{x-1}$

$+ \frac{6}{2x(2x-1)} \ldots z'''_x = \frac{4x-5}{2(2x-1)(2x-3)}$.

Il raziocinio col quale si ottengono queste equazioni, ed il metodo per integrarle sono simili a quelli adoperati per la seconda quistione: li ripeteremo minutamente nella seguente ove sono più importanti.

§ 134. Quarta quistione:

Quale è la sorte del banchiere e del giocatore nel II, III e IV caso, supponendo che la scommessa continui finchè non siansi avuti tutti i re, giacchè si suppone che sia il re la carta giocata?

Non si considera il primo caso, poichè questa quistione è la medesima allora che la seconda.

Indichiamo con z_x, u_x le sorti del banchiere e del giocatore nel primo caso, le quali abbiamo trovate $= \frac{1}{2}$.

II caso. Siano z'_x, u'_x le dette sorti nel secondo caso.

Nella prima coppia di carte può trovarsi un re, possono trovarsi due re, può trovarsi nessun re: in quest' ultimo evento la sorte del banchiere diviene

z'_{x-1}, che equivale a dire, se non viene alcun re, il banchiere vince la quantità z'_{x-1}, e siccome la probabilità che ciò succeda (130) è $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$, così la sorte del banchiere dipendente da questo evento sarà $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1}$.

Nel primo evento la scommessa non termina, o almeno ricomincia: così vinta o perduta che abbia il banchiere la scommessa $= 1$, gli resta la sorte z_{x-1}; ovvero dal venire nella prima coppia di carte un re, il banchiere vince certamente la quantità z_{x-1}, e può vincere la scommessa 1, se il re gli è favorevole. La probabilità che vi si trovi un re nelle due prime carte è $\frac{(2x-2)\cdot 2}{x(2x-1)}$ (130); la probabilità che il re sia favorevole al banchiere è $\frac{2x-2}{x(2x-1)}$: dunque par causa di questo primo evento la sorte del banchiere sarà

$$\frac{(2x-2)2}{x(2x-1)} \cdot z_{x-1} + \frac{2x-2}{x(2x-1)} \cdot 1 = \frac{2(2x-2)}{x(2x-1)}$$

$$\left(\text{poichè } z_{x-1} = \frac{1}{2} \right).$$

Nel secondo evento il banchiere vince la metà della scommessa $= \frac{1}{2}$, ed essendo la probabilità che accada questo secondo evento, $= \frac{1}{x(2x-1)}$, la sorte da esso dipendente sarà $\frac{x(2x-1)}{1} \cdot \frac{1}{2}$.

Sommando adunque le sorti dipendenti da questi tre eventi possibili, avremo l' espressione della sorte z'_x, e perciò

$$(1) \ldots\ldots z'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} z'_{x-1} + \frac{8x-7}{2x(2x-1)}:$$

da un simil raziocinio fatto pel giocatore risulta

$$(2) \ldots\ldots u'_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} u'_{x-1} + \frac{8x-9}{2x(2x-1)}:$$

Queste equazioni ci danno

$$z'_x = \frac{4x-3}{2(2x-1)},\ u'_x = \frac{4x-5}{2(2x-1)}.$$

III caso. Siano z''_x, u''_x le sorti del banchiere e del giocatore: nella prima coppia di carte può trovarsi un re, possono trovarsi due re, può trovarsi nessun re. In questo terzo evento (noi facciamo il raziocinio pel giocatore) la sorte del giocatore diviene u''_{x-1}, ovvero in questo terzo evento egli vince la quantità u''_{x-1}: la probabilità che questo evento succeda è $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}$; dunque la sorte del giocatore per causa di questo evento sarà $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} u''_{x-1}$.

Nel primo evento, vinca o perda il giocatore, gli resta sicuramente la sorte u'_{x-1} del caso precedente: la probabilità che accada il primo evento, è $\frac{6x-9}{x(2x-1)}$; e la probabilità che l' evento sia favorevole al giocatore, è $\frac{6x-9}{2x(2x-1)}$: dunque la sorte dipendente da questo evento è

$$\frac{6x-9}{x(2x-1)} \cdot u'_{x-1} + \frac{6x-9}{2x(2x-1)} \cdot 1 = \frac{6x-9}{x(2x-1)} \cdot \frac{4x-9}{2(2x-3)}$$
$$+ \frac{6x-9}{2x(2x-1)} = \frac{9x-18}{x(2x-1)}.$$

Nel secondo evento il giocatore perde la metà della scommessa, e gli resta la probabilità di vincere u_{x-1}: nella continuazione della scommessa, ovvero nel secondo evento egli vince la quantità $-\frac{1}{2} + u_{x-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$: la di lui sorte adunque in virtù di questo evento è $= 0$.

La somma delle sorti pei tre eventi che possono avvenire nella prima coppia di carte, sarà eguale alla sorte u''_x, ed avremo

$$(3) \ldots\ldots u''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} u''_{x-1} + \frac{9(x-2)}{x(2x-1)}:$$

Un simile raziocinio fatto pel banchiere conduce all' equazione

$$(4) \ldots\ldots z''_x = \frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)} z''_{x-1} + \frac{6(3x-4)}{2x(2x-1)}:$$

Queste equazioni integrate ci danno

$$z''_x = \frac{3x-3}{2x-1}, \quad u''_x = \frac{3x-6}{2x-1}.$$

IV caso. Siano z'''_x, u'''_x le sorti del banchiere e del giocatore, e ripetendo gli stessi raziocinj che abbiamo fatti per gli altri casi, avremo queste due equazioni

$$(5) \ldots\ldots z'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} z'''_{x-1}$$
$$+ \frac{24(x-2)^2 + 3(4x-7) + (4x-5)(2x-3)}{x(2x-1)(2x-3)},$$

$$(6)\ldots\ldots u'''_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{x(2x-1)} u'''_{x-1}$$
$$+ \frac{24(x-3)(x-2)+3(4x-9)+(4x-11)(2x-3)}{x(2x-1)(2x-3)},$$

le quali bisogna integrare per aver la soluzione della quistione.

Facendo uso del ripiego adoperato per l'equazioni del § 131, queste si riducono all' integrazione di semplici funzioni, e si trova

$$z'''_x = \frac{4x-5}{2x-1},\ u'''_x = \frac{4x-11}{2x-1}.$$

In fatti per l' equazione (5) facciasi

$x(2x-1)z'''_x = p_x$, ed avremo

$$p_x = \frac{(2x-5)(x-2)}{(x-1)(2x-3)} p_{x-1}$$
$$+ \frac{24(x-2)^2+3(4x-7)+(4x-5)(2x-3)}{2x-3};$$

facciasi $(x-1)(2x-3)p_x = p'_x$, ed avremo

$$p'_x = p'_{x-1} + \{24(x-2)^2 + 3(4x-7)$$
$$+ (4x-5)(2x-3)\}(x-1),$$

ove ponendo $x+1$ in vece dell' x, e riducendo si ha

$p'_{x+1} = p'_x + 32x^3 - 42x^2 + 16x$:

integrando ora quest' ultima equazione, avremo

$p'_x = 32\Sigma x^3 - 42\Sigma x^2 + 16\Sigma x = 8x^2(x-1)^2$

$-7x(x-1)(2x-1) + 8x(x-1)$, ovvero

$p'_x = x(x-1)(2x-3)(4x-5)$: sarà dunque

$$p_x = \frac{x(x-1)(2x-3)(4x-5)}{(x-1)(2x-3)} = x(4x-5), \text{ e}$$

$$z'''_x = \frac{p_x}{x(2x-1)} = \frac{x(4x-5)}{x(2x-1)} = \frac{4x-5}{2x-1},$$

Nella stessa guisa si troverebbe il valore di u'''_x.

Le costanti si tralasciano, perchè si troverebbero $= 0$.

§ 135. Se alle sorti del banchiere qui sopra calcolate s'aggiunge la sorte che nasce dall' ultima coppia di carte che è sempre vantaggiosa al banchiere, avremo nei diversi casi le effettive sorti del banchiere medesimo. Questo aumento di sorte per l' ultima coppia nasce e dalla probabilità che la carta sia favorevole al giocatore (che nell' ultima coppia (130) è in favore del banchiere) e dalla metà della probabilità che si abbia un doppietto.

Questo aumento di sorte è dunque eguale alla sorte del banchiere nella prima coppia di carte: dunque indicando con A questo aumento, sarà

I caso ...... $A = \frac{1}{2x}$;

II caso ..... $A = \frac{4x-3}{2x(2x-1)}$;

III caso ..... $A = \frac{3x-3}{x(2x-1)}$;

IV caso ..... $A = \frac{4x-5}{x(2x-1)}$.

Queste quantità debbono togliersi dalle sorti calcolate pel giocatore onde avere le vere sorti del medesimo.

Se si fa $x = 26$, avremo, a tenore di quello che è detto per la quarta quistione nel caso IV, cioè quando comincia il giuoco,

$$\text{Sorte del banchiere} = \frac{4x-5}{2x-1} + \frac{5x-5}{x(2x-1)} = \frac{2673}{26 \cdot 51};$$

Sorte del giocatore... $= \frac{4x-11}{2x-1} - \frac{4x-5}{x(2x-1)} = \frac{2319}{26 \cdot 51}$.

Dunque indicando con S la sorte del banchiere, e con s quella del giocatore, sarà
$S : s :: 2673 : 2319 :: 115 : 100$ circa.
Ciò mostra che il guadagno assoluto del banchiere in tutto il gioco è di 15 per $\frac{o}{o}$ circa (*);
e facendo $x = 26$ nella seconda quistione, si trova che $S : s :: 108 : 100$ circa.

(*) Supponendo che un banchiere tenga banco per quattro ore per sera, che faccia quattro giocate in un'ora, e che la totalità delle scommesse (con cui si principia un gioco che si continua finchè siano uscite tutte le carte delle dignità sopra le quali cadono le scommesse medesime) sia di 25 zecchini, il guadagno del banchiere sarà in quella sera di 60 zecchini. In 360 sere questo banchiere guadagnerà 21600 zecchini; e pure si trova chi va a scommettere contro il banchiere! Questa è una riprova che *i goffi sono il patrimonio dei furbi.*

FINE DELLA PARTE PRIMA.

COMPENDIO
DEL CALCOLO SUBLIME.

PARTE II.

CALCOLO DIFFERENZIALE.

CAPO PRIMO.

Principj del calcolo differenziale, e differenziali delle funzioni di una sola variabile.

§ 1. Supponendo che la variabile x, di cui è formata la funzione $\phi(x)$, acquisti un aumento indeterminato ω, questa funzione diventerà $\phi(x+\omega)$, la quale, sviluppata che sia secondo le potenze intiere e crescenti di ω, ci darà l' equazione

$$\phi(x+\omega)=\phi(x)+p\omega+q\omega^2+r\omega^3+\text{ecc.}$$

I coefficienti p, q, r, ecc. della serie che ne forma il secondo membro, sono altrettante funzioni della variabile x, dipendenti da $\phi(x)$: consideriamo, per ora, il solo p, e rappresentiamolo per questo simbolo $d\phi(x)$, e chiamiamolo *funzione derivata prima* della $\phi(x)$.

Questo processo col quale dalla funzione $\phi(x)$ ricavata abbiamo la funzione derivata prima p, o vero $d\phi(x)$, suol chiamarsi *legge di derivazione*, ed anche *operazione di derivazione*, mentre la $\phi(x)$ si appella funzione *primitiva* o funzione *derivatrice.*

Poniamo che, anco in quella *derivata prima*, la x acquisti l' aumento ω, che si sviluppi essa derivata in serie ordinata a seconda delle potenze intiere e crescenti dell' aumento, e che si prenda in questo sviluppo il coefficiente della prima potenza di ω; questo nuovo coefficiente si rappresenti con $d^2\phi(x)$, e si chiami *derivata seconda* della $\phi(x)$: è manifesto che la funzione $d^2\phi(x)$ avrà colla funzione $d\phi(x)$ la medesima relazione che questa aveva colla funzione data $\phi(x)$.

Nello stesso modo potrò dalla derivata seconda $d^2\phi(x)$ ricavare una derivata terza, che rappresenterò con $d^3\phi(x)$; da questa una quantità, e così via discorrendo: in sì fatta guisa avrò una serie di funzioni

$\phi(x)$, $d\phi(x)$, $d^2\phi(x)$, $d^3\phi(x)$, ecc.

ricavate l' una dall' altra mercè una medesima operazione.

In questa serie di funzioni *ciascun termine, per esempio* $d^3\phi(x)$, *è il coefficiente che avrebbe la prima potenza di un aumento indeterminato* ω *nello sviluppo del suo termine antecedente* $d^2\phi(x)$, *quando la variabile* x, *che da questo stesso antecedente è contenuta, acquista quell' aumento medesimo.*

Se $\phi(x) = x^m$, si ha

$dx^m = mx^{m-1}$ Derivata prima di x^m;

$d^2x^m = m(m-1)x^{m-2}$ Derivata seconda;

$d^3x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ Derivata terza,

ecc. ecc.

Se $\phi(x) = a^x$, si ha

$da^x = a^x \log a$ .... Derivata prima;

$d^2a^x = a^x (\log a)^2$..... Derivata seconda,

ecc. ecc.

Se $\phi(x) = \log x$, si ha

$d \log x = \frac{1}{x}$ . . . . Derivata prima;

$d^2 \log x = -\frac{1}{x^2}$ . . . . . . Derivata seconda;

ecc. ecc.

Se $\phi(x) = \operatorname{sen} x$, si ha

$d \operatorname{sen} x = \cos x$ . . . . Derivata prima.

Se $\phi(x) = \cos x$, si ha

$d \cos x = -\operatorname{sen} x$ . . . . . Derivata prima.

Le funzioni x^m, a^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ chiamansi funzioni semplici, perchè esse sono, per così dire, gli elementi dei quali si compongono tutte le funzioni che possono formarsi con operazioni algebraiche.

§ 2. Teorema. Rappresentando con $\phi(x) + p\omega + q\omega^2 + r\omega^3 +$ ecc. lo sviluppo in serie di una qualunque funzione $\phi(x+\omega)$, è sempre

$$p = d\phi(x)\,;\; q = \frac{d^2\phi(x)}{2}\,;\; r = \frac{d^3\phi(x)}{2 \cdot 3} \text{ ecc.},$$

di modo che si ha

$$\phi(x+\omega) = \phi(x) + d\phi(x)\cdot\omega + \frac{d^2\phi(x)}{2}\cdot\omega^2 + \frac{d^3\phi(x)}{2\cdot 3}\cdot\omega^3 \text{ ec.}$$

Cioè *le successive derivate divise pei prodotti dei numeri naturali* 1; 1 · 2; 1 · 2 · 3; *ecc. sono i coefficienti delle successive potenze di* ω *nello sviluppo di* $\phi(x+\omega)$, *di modo che in questo sviluppo il coefficiente di* ω^n *è*

$$\frac{d^n\phi(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots n}.$$

Dalla stessa definizione delle derivate si ha $p = d\phi(x)$: per dimostrare $q = \frac{d^2\phi(x)}{2}$ rappresentiamo q con $\phi''(x)$, ed avremo

$\phi(x+\omega) = \phi(x) + d\phi(x) \cdot \omega + \phi''(x) \cdot \omega^2 + \text{ecc.}$

Ora se in questa equazione si sostituisce $x+\omega$ ad x, potremo nel secondo membro far questa sostituzione in due modi, o ponendovi 2ω in vece di ω, ovvero sostituendo effettivamente $x+\omega$ ad x nelle funzioni $\phi(x)$, $d\phi(x)$, $\phi''(x)$, ecc., ed i risultamenti delle due sostituzioni dovranno essere identici.

Quel primo modo ci dà

(1).... $\phi(x+2\omega)=\phi(x)+2d\phi(x)\cdot\omega+4\phi''(x)\cdot\omega^2+\text{ecc.}$;

ed il secondo

(2).... $\phi(x+2\omega)=\phi(x+\omega)+d\phi(x+\omega)\cdot\omega+\phi''(x+\omega)\cdot\omega^2\ \text{ec.}$;

ma $\phi(x+\omega) = \phi(x) + d\phi(x)\cdot\omega + \phi''(x)\cdot\omega^2 + \text{ecc.}$

$d\phi(x+\omega) = d\phi(x) + d^2\phi(x)\cdot\omega + \text{ecc.}$

$\phi''(x+\omega) = \phi''(x) + \text{ecc.}$, dunque

$\phi(x+2\omega) = \phi(x) + 2d\phi(x).\omega + \{2\phi''(x) + d^2\phi(x)\}\cdot\omega^2\ \text{ecc.}$

Quest' equazione paragonata con la (1) ci dà

$4\phi''(x) = 2\phi''(x) + d^2\phi(x)$, e quindi

$$\phi''(x) = \frac{d^2\phi(x)}{2} = q.$$

Per dimostrare $r = \dfrac{d^3\phi(x)}{2\cdot 3}$ rappresentiamo r con $\phi'''(x)$, ed avremo

$$\phi(x+\omega) = \phi(x) + d\phi(x)\cdot\omega + \frac{d^2\phi(x)}{2}\cdot\omega^2 + \phi'''(x)\cdot\omega^3 + \text{ec.}$$

Ponendo in questa equazione $x+\omega$ in vece di x, avremo, come qui sopra,

$$(3)\ldots\ \phi(x+2\omega) = \phi(x) + 2d\phi(x)\cdot\omega + 4\,\frac{d^2\phi(x)}{2}\cdot\omega^2 + 8\phi'''(x)\cdot\omega^3 + \text{ecc.}$$

$$(4)\ldots\ \phi(x+2\omega) = \phi(x+\omega) + d\phi(x+\omega)\cdot\omega + \frac{d^2\phi(x+\omega)}{2}\,\omega^2 + \phi'''(x+\omega)\cdot\omega^3 + \text{ecc.};$$

Ma $\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + d\varphi(x)\cdot\omega + \frac{d^2\varphi(x)}{2}\cdot\omega^2$

$+ \varphi'''(x)\cdot\omega^3 +$ ecc.

$d\varphi(x+\omega) = d\varphi(x) + d^2\varphi(x)\cdot\omega + \frac{d^3\varphi(x)}{2}\cdot\omega^2 +$ ecc.

$d^2\varphi(x+\omega) = d^2\varphi(x) + d^3\varphi(x)\cdot\omega +$ ecc.

$\varphi'''(x+\omega) = \varphi'''(x) +$ ecc.;

dunque

$\varphi(x+2\omega) = \varphi(x) + 2d\varphi(x)\cdot\omega + 2d^2\varphi(x)\cdot\omega^2$

$+ \{2\varphi'''(x) + d^3\varphi(x)\}\,\omega^3 +$ ecc.;

quest' equazione paragonata con la (3) ci darà

$\varphi'''(x) = \frac{d^3\varphi(x)}{2\cdot 3} = r$; così troveremo $s = \frac{d^4\varphi(x)}{2\cdot 3\cdot 4}$ ecc.

In generale il coefficiente di ω^n nella serie di $\varphi(x+\omega)$ sarà eguale a $\frac{d^n\varphi(x)}{2\cdot 3\cdot 4\ldots n}$, come annunzia il teorema.

§ 3. Pel dimostrato teorema si ha dunque

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x) + d\varphi(x)\cdot\omega + \frac{d^2\varphi(x)}{2}\cdot\omega^2 + \frac{d^3\varphi(x)}{2\cdot 3}\cdot\omega^3 + \frac{d^4\varphi(x)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\omega^4 + \text{ecc.}$$

Ove giovi osservare che i coefficienti di ω sono funzioni dell'x, i quali nulla hanno che fare con ω, e che perciò restano i medesimi, qualunque valore ci piaccia attribuire a questa lettera.

La somma di tutt' i termini, eccettuato il primo $\varphi(x)$, i quali trovansi nel secondo membro di questa equazione, è l' aumento totale che riceve la

funzione $\phi\,(x)$, quando la x acquista essa l'aumento ω. Questo aumento totale

$$d\phi\,(x)\cdot\omega + \frac{d^2\phi\,(x)}{2}\,\omega^2 + \frac{d^3\phi\,(x)}{2\cdot 3}\,\omega^3 + \text{ecc.}$$ chiamasi la

differenza finita di $\phi\,(x)$; ed i termini i quali compongono questa differenza finita, privati però dei divisori numerici 1, $1\cdot 2$, $1\cdot 2\cdot 3$, ecc., chiamansi *differenziali primo, secondo, terzo*, ecc., e scrivonsi come quelle derivate, cioè con la lettera d posta avanti la funzione, alla qual lettera si dà un indice eguale a quello della derivata, cui il differenziale corrisponde. Dal che segue che un differenziale, per esempio il secondo, è eguale alla derivata seconda moltiplicata per ω^2; si ha dunque in generale

$d^n\phi(x)\cdot\omega^n = d^n\phi\,(x)$ differenziale n^{esimo} di $\phi\,(x)$;

donde nasce,

1.° Che la differenza finita di qualunque funzione ϕ della variabile x {scrivo ϕ in vece di $\phi(x)$} è eguale al di lei differenziale primo, più la metà del di lei differenziale secondo, più il sesto del di lei differenziale terzo, più il 24^{esimo} del differenziale quarto, ecc.;

2.° Che per avere il differenziale di una funzione si prende la di lei derivata del medesimo ordine, e si moltiplica per la potenza dell' aumento, il cui esponente eguaglia quell' ordine;

3.° Che *vice versa* il differenziale diviso per quella potenza dell' aumento eguaglia la derivata del medesimo ordine.

§ 4. Se la funzione $\phi\,(x)$ fosse la stessa variabile x, allora $\phi\,(x) = x$, $\phi\,(x+\omega) = x+\omega$, e quindi $d\phi = dx = \omega$; l' aumento adunque indeterminato della variabile x è lo stesso differenziale primo dell' x; per questo d' ora in avanti rappresenteremo con dx questo aumento indeterminato della variabile x.

Avremo pertanto

Il diff.^{e} primo di $x^m = dx^m = mx^{m-1} \cdot dx$,

secondo $= d^2x^m = m(m-1)x^{m-2} \cdot dx^2$, (*)

terzo $= d^3x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \cdot dx^3$,

ecc.

Il diff.^{e} primo di $a^x = da^x = a^x \log. a \cdot dx$,

secondo $= d^2a^x = a^x (\log a)^2 \cdot dx^2$,

terzo $= d^3a^x = a^x (\log a)^3 \cdot dx^3$,

ecc.

Il diff.^{e} primo di $\log x = d \log x = \frac{dx}{x}$,

secondo $= d^2 \log x = -\frac{dx^2}{x^2}$,

ecc.

Il diff.^{e} primo di $\operatorname{sen} x = d \operatorname{sen} x = \cos x \cdot dx$,

secondo $= d^2 \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \cdot dx^2$,

ecc.

Il diff.^{e} primo di $\cos x = d \cos x = -\operatorname{sen} x \cdot dx$,

secondo $= d^2 \cos x = -\cos x \cdot dx^2$,

ecc.

§ 5. Una qualunque derivata n^{esima} essendo eguale al differenziale dello stesso nome diviso per dx^n, ne segue che lo sviluppo di $\phi(x+\omega)$, datoci dal teorema dimostrato al § 2, può anco scriversi in questa guisa

$$\phi(x+\omega) = \phi(x) + \frac{d\phi}{dx}\omega + \frac{d^2\phi}{dx^2} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{d^3\phi}{dx^3} \cdot \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

(*) dx^2, dx^3, ecc. significano il quadrato, il cubo, ecc. dell' aumento dx.

in cui i coefficienti dell' ω, $\frac{\omega^2}{2}$, $\frac{\omega^3}{2\cdot3}$, ecc. sono il differenziale primo della funzione $\phi(x)$ diviso per dx; il differenziale secondo della stessa diviso per dx^2; il di lei differenziale terzo diviso per dx^3, ecc.

In questa formola consiste il celebre *teorema di Taylor*.

I coefficienti $\frac{d\phi}{dx}$, $\frac{d^2\phi}{dx^2}$, ecc. debbono risguardarsi come altrettante funzioni dell' x, le quali non contengono che apparentemente il dx, giacchè prendendo i differenziali effettivamente, e dividendoli per dx, dx^2, ecc., ne risultano funzioni indipendenti dal dx che sparisce dal calcolo.

§ 6. Come si disse, si ricavano i differenziali dalle derivate, ma si può anche a dirittura seguir questa regola che dalle cose dette sopra scaturisce.

Per avere il differenziale primo $\mathrm{d}\phi$ *della funzione* ϕ, *poniamo in essa* $\mathrm{x}+\mathrm{dx}$ *in vece dell'* x, *quindi sviluppata essa funzione secondo le potenze del* dx, *prendiamo il termine ove è il* dx *alla prima potenza; questo termine avrà la forma* Pdx, *e sarà* $\mathrm{d}\phi=\mathrm{Pdx}$.

Per avere il differenziale secondo, non badando al dx *che noi supponiamo aumento indeterminato indipendente dall'* x, *si prenda il differenziale primo di quel coefficiente* P, *cioè sostituiscasi* $\mathrm{x}+\mathrm{dx}$ *all'* x *nella funzione* P, *e sviluppando secondo le potenze del* dx, *si prenda il termine* Qdx *ove* dx *è alla prima potenza, ed avremo allora* $\mathrm{dP}=\mathrm{Qdx}$, *e quindi* $\mathrm{d}^2\phi=\mathrm{dP}\cdot\mathrm{dx}=\mathrm{Qdx}^2$, *e così per gli altri.*

Quando la funzione ϕ da differenziarsi contiene diverse variabili x, y, z, ecc., allora onde indicare rispetto a qual variabile debbe differenziarsi, in vece del $d\phi$ si scrive $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx$ se vogliamo differenziare riguardo ad x; e si scrive $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)dy$ se

vogliamo differenziare a riguardo di y; lo stesso dicasi delle altre variabili.

In generale con $\left(\frac{d^n\phi}{dx^n}\right) dx^n$ noi indicheremo il differenziale n^{esimo} della funzione ϕ preso rispetto all' x; e con $\left(\frac{d^n\phi}{dy^n}\right) dy^n$ il differenziale n^{esimo} preso a riguardo dell' y, ecc.

L' espressione poi $\left(\frac{d^n\phi}{dx^n}\right)$ significa il differenziale n^{esimo} nel ϕ preso rispetto all' x, e diviso per la potenza n^{esima} dell' x: in una tale espressione il denominatore dx^n fa due veci: prima c' indica quale è la variabile rispetto a cui debbe differenziarsi, ed il numero delle volte che la differenziazione debbe essere rifatta; poi egli è divisore del risultamento ottenuto per mezzo di questa differenziazione: egli è dunque destinato a svanire dal calcolo ad operazione eseguita; così l' espressione $\left(\frac{d^n\phi}{dx^n}\right)$ non contiene (eseguitesi le operazioni ch' essa indica) e debbe riguardarsi come non contenere il dx, cioè come una funzione soltanto dell' x e delle altre quantità contenute nel ϕ.

§ 7. Veniamo alla differenziazione delle funzioni composte. Siano p, q, r, ecc. tante funzioni delle quali si conoscano i differenziali

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx, \left(\frac{dq}{dx}\right) dx, \left(\frac{dr}{dx}\right) dx, \text{ ecc.}$$

Con y rappresentiamo una qualunque funzione composta delle p, q, r, ecc., e cerchisi il suo differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right)\, dx$.

Quando x diviene $x + dx$, le funzioni p, q, ecc. divengono nel tempo stesso (5)

$$p + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \text{ecc.},$$

$$q + \left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2q}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \text{ecc.}$$

Basterà dunque nella funzione y sostituire queste serie in vece delle funzioni p, q, r, ecc., svilupparla di poi secondo le potenze del dx, e prendere il termine di quello sviluppo (6) nel quale il dx trovasi alla prima potenza. Questo termine sarà allora il valore del differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right)\, dx$.

§ 8. Sia $y = \phi(p)$ essendo $\phi(p)$ una funzione di p. Sostituendo a p la serie

$p + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \text{ecc.}$, $\phi(p)$ diverrà

$$\phi\left\{p + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \text{ecc.}\right\}.$$

Poniamo $\theta = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{2} + \text{ecc.}$, ed il teorema di Taylor ci darà

$$\phi(p+\theta) = \phi(p) + \left(\frac{d\phi}{dp}\right) \theta + \left(\frac{d^2\phi}{dp^2}\right) \frac{\theta^2}{2} + \text{ecc.},$$

ove $\left(\frac{d\phi}{dp}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dp^2}\right)$, ecc. sono i differenziali primo e secondo, ecc. del $\phi(p)$ presi a riguardo di p, e divisi per dp, dp^2, ecc.

Sostituendo ora il valore del θ, avremo

$$\phi\left\{p+\left(\frac{dp}{dx}\right)dx+\text{ecc.}\right\}=\phi(p)+\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$$
$$+\left\{\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{dp^2}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)^2\right\}\frac{dx^2}{2}+\text{ecc.}$$

Sarà dunque $\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$ il differenziale della funzione $\phi(p)$ composta dell' altra funzione p. *Dunque per avere il differenziale primo di una funzione qualunque* ϕ(p) *del* p, *essendo anche* p *una funzione dell'* x, *bisogna prendere il differenziale primo del* ϕ(p) *relativamente a* p, *e dividerlo per* dp, *onde abbiasi* $\left(\frac{d\phi}{dp}\right)$, *quindi moltiplicare questa trovata quantità pel differenziale primo del* p, *cioè per* $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ dx.

Per es. Fatto $y=\phi(p)=p^m$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right)dx=mp^{m-1}\left(\frac{dp}{dx}\right)dx.$$

Sia $p=sen\,x$, e sarà $y=(sen\,x)^m$; quindi

$$\left(\frac{d\,sen\,x^m}{dx}\right)dx=m\,(sen\,x)^{m-1}\cos x\,dx.$$

Fatto $y=a^p$, si avrà $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=a^p\log a\cdot\left(\frac{dp}{dx}\right)dx.$

Sia $p=\cos x$, e sarà $y=a^{\cos x}$; quindi

$$\left(\frac{da^{\cos x}}{dx}\right)dx=-a^{\cos x}\log a\,sen\,x\cdot dx.$$

Fatto $y=\log p$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{1}{p}\left(\frac{dp}{dx}\right) dx;$$

fatto $y = sen\, p$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = cos\, p \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) dx;$$

fatto $y = cos\, p$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = - sen\, p \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) dx.$$

§ 9. Sia $y = \phi(p, q)$. Siccome le due quantità p, q non sono individuate, ed in conseguenza una non ha che fare coll' altra, pel che possono esse risguardarsi come indipendenti tra loro; così dovrà aversi lo stesso risultamento, tanto a sostituire $x + dx$ all' x nello stesso tempo entro p e q, quanto a far questa sostituzione prima nel p, poi nel q. Battendo questa seconda strada, avremo prima

$$\phi(p, q) + \left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \text{ecc.};$$

poi se poniamo $x + dx$ in vece dell' x nella funzione q, il primo termine di questa serie diverrà

$$\phi(p, q) + \left(\frac{d\phi}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \text{ecc.}$$

Quanto al termine $\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ è chiaro che, rappresentato con Pdx, ei diventerà

$$\left\{ P + \left(\frac{dP}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \text{ecc.} \right\} dx, \text{ ovvero}$$

$$Pdx + \left(\frac{dP}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) dx^2 + \text{ecc.}$$

Dunque la proposta funzione $\phi(p, q)$, quando l' x

vi diviene $x + dx$, si cangerà nella serie

$$\phi(p,q) + \left\{ \left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\phi}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) dx \right\} + \text{ecc.}$$

Dunque $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\phi}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) dx.$

Nella stessa guisa se fosse $y = \phi(p, q, r)$, troveremmo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\phi}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) dx$$
$$+ \left(\frac{d\phi}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right) dx.$$

In generale adunque *il differenziale primo di una funzione composta di differenti funzioni particolari è la somma dei differenziali primi relativi a ciascuna di queste funzioni medesime, considerate separatamente ed indipendentemente l' una dall' altra.*

§ 10. Dunque fatto

$y = Ap + Bq - Cr +$ ecc., si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = A\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + B\left(\frac{dq}{dx}\right) dx - C\left(\frac{dr}{dx}\right) dx + \text{ec.};$$

Fatto $y = Apqr$ ecc., si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = Aqr\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + Arp\left(\frac{dq}{dx}\right) dx + Apq\left(\frac{dr}{dx}\right) dx, \text{ec.};$$

Fatto $y = A\frac{p}{q} = Apq^{-1}$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = A\,\frac{q\left(\frac{dp}{dx}\right) dx - p\left(\frac{dq}{dx}\right) dx}{q^2};$$

Fatto $y = Aq^p$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = Apq^{p-1}\left(\frac{dq}{dx}\right) dx + Aq^p \log q \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) dx.$$

§ 11. Ecco alcuni altri differenziali che spesso occorrono.

Fatto $y = sen\, 2x$, si ha $y = 2\, sen\, x \cdot cos\, x$, quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = 2\, cos\, x^2 \cdot dx - 2\, sen\, x^2 \cdot dx = 2\, cos\, 2x \cdot dx\,;$$

Fatto $y = tang\, x$, si ha $y = \frac{sen\, x}{cos\, x}$,

quindi $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{dx}{cos\, x^2}$;

Fatto $y = sec\, x$, si ha $y = \frac{1}{cos\, x}$, quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{sen\, x \cdot dx}{cos\, x^2} = \frac{tang\, x \cdot dx}{cos\, x}\,;$$

Fatto $y = cot\, x$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = -\frac{dx}{sen\, x^2}\,;$$

Fatto $y = cosec\, x$, si avrà

$$\left(\frac{dx}{dx}\right) dx = -\frac{cos\, x}{sen\, x^2}\, dx\,;$$

Fatto $y = sen\, v\, x$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = dx \cdot sen\, x\,;$$

Fatto $y = log\,(a + bx + cx^2 + ecc.)$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{b + 2cx + ecc.}{a + bx + cx^2 + ecc.}\, dx\,;$$

Fatto $y = \sqrt[m]{(a + bx + cx^2 + ecc.)^n}$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{n}{m} \sqrt[m]{(a + bx + cx^2 + ec.)^{n-m}} \cdot (b + 2cx + ec.)\, dx;$$

Fatto $y = sen\, x^m \cdot cos\, x^n$, si avrà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = m\, sen\, x^{m-1}\, cos\, x^{n+1}\, dx - n\, cos\, x^{n-1}\, sen\, x^{m+1}\, dx.$$

§ 12. Per differenziare *Ar. sen x*, pongo $y = Ar.\,sen\,x$, ed avrò allora $x = sen\,y$, quindi $dx = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx \cdot cos\,y$; sarà pertanto $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{1}{cos\,y} dx$. Ma $cos\,y = \sqrt{1 - x^2}$, dunque $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = d\,Ar.\,sen\,x$.

Il differenziale di *Ar. sen p*, essendo *p* una funzione di *x*, sarà $d\,Ar.\,sen\,p = \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)}} \left(\frac{dp}{dx}\right) dx$.

Sia ora $y = Ar.\,cos\,x$, e di qui ne ricaveremo $y = Ar.\,sen\,\sqrt{(1 - x^2)}$, e quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = d\,Ar.\,cos\,x = -\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}};$$

Sia $y = Ar.\,tang.\,x$, e ne verrà

$y = Ar.\,sen\,\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}$, quindi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = d\,Ar.\,tang\,x = \frac{dx}{1 + x^2};$$

nella stessa maniera vedremo che essendo

$y = Ar.\,cot\,x$, si ha $d\,Ar.\,cot\,x = -\frac{dx}{1 + x^2}$;

$y = Ar.\,sec\,x \ldots d\,Ar.\,sec\,x = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$;

$y = Ar.\,cosec\,x \ldots d\,Ar.\,cosec\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}$;

$y = Ar.\,sen\,v\,x \ldots d\,Ar.\,sen\,v\,x = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$;

Se questi trascendenti in vece dell' *x* contenessero una funzione *p* dell' *x*, allora nei trovati differenziali

dovremmo sostituire il p all' x, e $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ al dx.

Se poi vorremo i differenziali dei medesimi trascendenti quando il raggio $= a$, non dovremo fare altro che moltiplicare per a i trovati differenziali, e sostituire in essi $\frac{x}{a}$, $\frac{dx}{a}$ in vece di x, dx.

§ 13. Pei differenziali degli ordini superiori non avvi alcuna difficoltà, imperciocchè si ottengono essi colla differenziazione di quei degl' inferiori; così i differenziali secondi si hanno dalla differenziazione dei primi; i terzi da quella dei secondi. Sembrami inutile trattenermi a fare esempj; pure fatto $y = Ar.\,sen\,x$, si troverà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = d\,Ar.\,sen\,x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx\,;$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2 = d^2\,Ar.\,sen\,x = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx^2\,;$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) dx^3 = d^3\,Ar.\,sen\,x = \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\,dx^3\,;$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) dx^4 = d^4\,Ar.\,sen\,x = \frac{9x+6x^3}{\sqrt{(1-x^2)^7}}\,dx^4\,;$$

$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) dx^5 = d^5\,Ar.\,sen\,x = \frac{9+72x^2+24x^4}{\sqrt{(1-x^2)^9}}\,dx^5\,,\ \text{ecc.}$$

§ 14. Termineremo questo capitolo con una osservazione importante.

Il differenziale primo di una funzione può fare svanire una quantità costante della funzione medesima; il differenziale secondo ne può fare svanire due; il terzo tre, ecc.

Sia in fatti $y = \phi.(x) + a + bx + cx^2 + ex^3 + $ ec., ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx + \{b + 2cx + 3ex^2 + \text{ecc.}\}\,dx\,;$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx^2 = \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx^2 + \{2c + 6ex + \text{ecc.}\}\,dx^2,\ \text{ecc.}$$

Nel differenziale primo non trovasi più la costante a; nel secondo non trovansi più nè a nè b, ecc.

CAPO II.

Differenziali dell' equazioni con due variabili, e delle funzioni di molte variabili.

§ 15. Abbiasi tra le due variabili x, y l'equazione $F(x,y)=0$ nella quale il primo membro $F(x,y)$ rappresenta una funzione qualunque dell' x e dell' y. Una di queste variabili sarà funzione dell' altra: risguardiamo y qual funzione dell' x

Se la variabile x diverrà $x+dx$, il primo membro di quella equazione sviluppato a seconda delle potenze del dx, prenderà la forma

$$F(x,y) + Pdx + Qdx^2 + \text{ecc.}\,;$$

sarà dunque (6) Pdx il differenziale della funzione composta $F(x,y)$; sarà, cioè,

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = Pdx\,;$$

ma l' equazione $F(x,y)=0$ è vera per qualunque valore che diasi all' x, dunque sarà anco

$$F(x,y) + \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}dx + Qdx^2 + \text{ecc.} = 0\,;$$

ora questa ultima equazione debb' esser anche vera, qualunque sia il valore dell' aumento dx; dunque, essendo già $F(x,y)=0$, dovranno esser eguali a zero i coefficienti delle potenze del dx; dunque

$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, ed in conseguenza

$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=0$, e di qui

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=-\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}dx.$$

Concluderemo poi che *l' operazione della differenziazione non altera l' equazione sopra cui si eseguisce, in modo che non sia più vera l' eguaglianza tra i due suoi membri., che questa anzi continua a sussistere come prima.*

§ 16. Rappresentiamo con $F=0$ l' equazione $F(x,y)=0$; e con $dF=0$ l' equazione

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)dx+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=0,$$

la quale è il differenziale di quella.

Prendendo adesso il differenziale dell' equazione $dF=0$, si avrà un' equazione $d^2F=0$, che per le ragioni dette al § antecedente sussisterà nel medesimo tempo che $dF=0$; così da $d^2F=0$ ricaveremo un' altra equazione $d^3F=0$, ecc.

Posta dunque l' equazione $F=0$, la quale, rispetto all' equazioni differenziali, chiamasi *equazione finita, il calcolo differenziale ci farà da essa ricavare l' equazione* $dF=0$, $d^2F=0$, $d^3F=0$, $d^4F=0$, *ecc.*, *le quali tutte sussistono insieme con essa, ed appartengono in conseguenza alla medesima relazione di variabili.*

Ma non solo tutte l' equazioni differenziali $dF=0$, $d^2F=0$, $d^3F=0$; ecc. (cui si dà il nome di *differenziali esatte*) sono altrettante equazioni le quali sussistono quando sussiste la $F=0$, ma ancora sono tali tutte quelle altre equazioni le quali si possono

formare combinando tra loro queste differenziali esatte e la $F=0$. A sì fatte equazioni si dà il nome di *differenziali del primo ordine*, quando esse sono nate dal combinare tra loro $F=0$, $dF=0$; di *differenziali del secondo*, quando esse sono nate dal combinare tra loro $F=0$, $dF=0$, $d^2F=0$, e così via discorrendo.

Queste diverse combinazioni sono infinite di numero.

§ 17. Se poi l'equazione $F=0$, della quale vuolsi il differenziale, fosse una equazione identica dell'x solamente, allora, mantenendosi essa tale, qualunque valore diasi all' x, sarà anche identica quando x diviene $x+\omega$, per che avremo egualmente $dF=0$, $d^2F=0$, $d^3F=0$, ecc.

Per mezzo dell' equazioni differenziali di una equazione identica si potranno avere le somme di molte serie: così essendo come si sa

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\text{ecc.}=\frac{1}{1-x},$$

il differenziale primo di questa equazione ci darà

$$1+2x+3x^2+4x^3+\text{ecc.}=\frac{1}{(1-x)^2};$$

il secondo ci darà

$$1+3x+6x^2+10x^3+\text{ecc.}=\frac{1}{(1-x)^3};$$

il terzo

$$1+4x+10x^2+20x^3+\text{ecc.}=\frac{1}{(1+x)^4};$$

ecc. ecc.

In generale conoscendo la somma S di una data serie $A+B+C+D+$ ecc., si troverà

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)=\left(\frac{dA}{dx}\right)+\left(\frac{dB}{dx}\right)+\left(\frac{dC}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

ecc. ecc.

Questo sia detto per cominciare a vedere il vantaggio dell' equazioni differenziali.

§ 18. Indicando con $\phi = 0$ un' equazione tra due variabili x, y, e con $\phi' = 0$ il suo differenziale primo, si potrà dimostrare questo teorema.

Tutte le diverse combinazioni che si possono fare con le due equazioni $\phi = 0$; $\phi' = 0$, danno dei risultamenti in apparenza diversi, ma che sono in sostanza la medesima cosa, potendo sempre ridursi l' uno all' altro.

Rappresentiamo con $F(\phi, \phi')$, $f(\phi, \phi')$ due funzioni qualunque delle quantità ϕ, ϕ', e tali che divengano nulle quando $\phi = 0$, $\phi' = 0$. Dalle due equazioni $F(\phi, \phi') = 0$, $f(\phi, \phi') = 0$ saranno rappresentate due qualunque combinazioni fatte con l' equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, e queste due equazioni, le quali saranno differenziali del primo ordine, significano in sostanza la stessa cosa, e riduconsi l' una all' altra: in fatti potendo sempre farsi $F(\phi, \phi') = f(\phi, \phi') + \psi(\phi, \phi')$ {essendo $\psi(\phi, \phi')$ una funzione dei ϕ, ϕ' che si annulla col far nulli ϕ, ϕ'}, e l'equazione $\psi(\phi, \phi') = 0$ essendo vera da sè medesima; ne segue che $F(\phi, \phi') = 0$ sarà la medesima cosa che $f(\phi, \phi') = 0$.

Considerando le quantità colle quali sono formate le funzioni ϕ, ϕ', si vedrà che qualunque combinazione $F(\phi, \phi') = 0$ è una equazione tra le variabili x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$: ciò premesso, dimostriamo questo nuovo e bel teorema

Se dalle due equazioni differenziali del primo ordine $F(\phi, \phi') = 0$, $f(\phi, \phi') = 0$, le quali nascono dal combinare in due modi qualunque diversi le equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, si elimina la funzione differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, il risultamento della eliminazione porterà una nuova equazione, la quale non sarà in sostanza che la stessa $\phi = 0$, a questa potendo sempre ridursi.

In fatti per eliminare tra quelle due equazioni il $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ basta che si elimini la funzione ϕ' che lo

contiene, e si avrà allora, come risultamento, una equazione di questa forma $\psi\,(\phi) = 0$, la quale manifestamente si riduce alla $\phi = 0$.

Per esempio: sia $\phi = y - 2ax^2 = 0$, e si avrà $\phi' = \left(\frac{dy}{dx}\right) - 4ax = 0$. Eliminiamo a per mezzo delle due equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, e ci verrà l' equazione differenziale del primo ordine

$$F(\phi, \phi') = y - \frac{x}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Se ora le due equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$ si sommano, avremo un' altra equazione differenziale del primo ordine

$$f(\phi, \phi') = y + \left(\frac{dy}{dx}\right) - 2ax^2 - 4ax = 0.$$

Tra le due equazioni differenziali del primo ordine eliminiamo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed avremo per risultamento

$y + \frac{2y}{x} - 2ax\,(2 + x) = 0$, la quale si riduce subito da $y - 2ax^2 = 0$.

§ 19. E per l' equazioni differenziali del secondo ordine, se $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$ rappresentano una equazione tra due variabili x, y, ed i differenziali esatti primo e secondo, si ha questo teorema.

Tutte l' equazioni che si possono avere, combinando in qualunque modo che si voglia quelle tre equazioni $\phi = 0$, $\phi' = 0$, $\phi'' = 0$; e parimente tutte l' equazioni che si possono avere, differenziando una qualunque combinazione $f(\phi, \phi') = 0$ *delle due* $\phi = 0$, $\phi' = 0$, *e combinando in qualunque modo che si voglia* $f(\phi, \phi') = 0$ *col differenziale di essa, sono altrettante equazioni le quali sono in sostanza la stessa, una potendosi sempre ridurre all' altra.*

Sia in fatti $F(\phi, \phi', \phi'') = 0$ l'equazione differenziale del secondo ordine nata dal combinare in

qualche modo $\phi=0$, $\phi'=0$, $\phi''=0$: sia $f(\phi, \phi')=0$ l' equazione differenziale del primo ordine, nata dal combinare $\phi=0$, $\phi'=0$, ed il di lei differenziale sarà $\left(\frac{df}{d\phi}\right)\phi' + \left(\frac{df}{d\phi'}\right)\phi''=0$, che io rappresenterò con $f'(\phi, \phi', \phi'')=0$: sia in fine $\psi(\phi, \phi', \phi'')=0$ una combinazione qualunque delle due equazioni $f(\phi, \phi')=0$, $f'(\phi, \phi', \phi'')=0$; e nel modo stesso adoperato al § 18 per l' equazioni a differenze prime, si dimostrerà che le due equazioni $F(\phi, \phi', \phi'')=0$, $\psi(\phi, \phi', \phi'')=0$ sono riducibili l' una all' altra.

§ 20. Si può anche dimostrare per l' equazioni differenziali del secondo ordine un nuovo teorema compagno a quello dimostrato al § 18 per quelle di primo, cioè

Se da tre equazioni differenziali del secondo ordine $F(\phi, \phi', \phi'')=0$, $f(\phi, \phi', \phi'')=0$, $\psi(\phi, \phi' \phi'')=0$, *le quali nascono combinando in tre modi diversi le tre equazioni* $\phi=0$, $\phi'=0$, $\phi''=0$, *si eliminano le funzioni differenziali* $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, *il risultamento della eliminazione sarà una nuova equazione, la quale sarà in sostanza* $\phi=0$, *giacchè a questa potrà sempre ridursi.*

Credo inutile farne alcuni esempj.

§ 21. Io non mi estendo ad esporre i teoremi che possono aversi nell' equazioni differenziali degli ordini superiori, essendo facile a chicchessia il ritrovarli, se avrà ben compreso quei dimostrati per l' equazioni differenziali del primo e del secondo ordine; mi fermo però ad applicare questa teorica generale delle combinazioni dell' equazioni differenziali ad un genere particolare di combinazioni, e questo si è *l' eliminazione delle costanti.*

Indicando con $F(x, y, a, b, \text{ecc.}) = 0$ ovvero con $F = 0$ un' equazione tra le variabili x, y e quante si vogliono costanti a, b, c, ecc., col mezzo di essa e del suo differenziale $\left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ eliminiamo una di quelle costanti, per esempio a, avremo un' equazione differenziale del primo ordine tra x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e tutte quelle costanti, eccettuata a. Indichiamo questa equazione con $\psi\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$, ovvero $\psi = 0$.

Dunque un' equazione F = 0 *può sempre contenere una costante di più di un' altra equazione differenziale del primo ordine che da essa dipenda.*

Supponiamo che in vece di eliminare a, eliminata avessimo la costante b, e sia $\psi'\left\{x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$ il risultamento di questa seconda eliminazione: allora il teorema del § 18 c' insegna che eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ per mezzo delle due equazioni $\psi = 0$, $\psi' = 0$, ritroveremo l' equazione $F = 0$, ovvero una che a questa si può sempre ridurre.

§ 22. Intendiamo che $F' = 0$, $F'' = 0$ significhino il differenziale primo e secondo dell' equazione $F = 0$. Potremo per mezzo di queste tre equazioni eliminare due delle costanti contenute nell' equazione $F = 0$, ed il risultamento di questa eliminazione sarà una equazione differenziale del secondo ordine.

Dunque un' equazione F = 0 *può sempre contenere due costanti di più di un' equazione differenziale del secondo ordine che da essa dipenda.*

Se poi in vece di eliminare quella coppia di costanti, ne avessimo eliminate due altre coppie,

avremmo avuto due altre equazioni differenziali del secondo ordine; e con queste tre equazioni differenziali eliminando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ritroveremmo la stessa $F=0$, ovverò una a lei equivalente.

Per dedurre dalle tre equazioni $F=0$, $F'=0$, $F''=0$ un' equazione differenziale del secondo ordine, la quale contenga due costanti di meno, per esempio a, b della equazione $F=0$, si può anche seguir questa via: ricavare dalle due equazioni $F=0$, $F'=0$ una equazione differenziale del primo ordine $R=0$, la quale non contenga a, e presone il differenziale $R'=0$, eliminare tra $R=0$, $R'=0$ la costante b: il risultamento sarà un' equazione differenziale del secondo ordine senza a, b: oppure eliminare tra $F=0$, $F'=0$ la costante b per averne un' equazione $S=0$, e quindi eliminare l' altra costante a tra la stessa $S=0$, ed il suo differenziale $S'=0$; il risultamento sarà egualmente una differenziale del secondo ordine senza a, b; giacchè tutti questi risultamenti saranno la cosa stessa, come ci dimostra il teorema del § 19.

Dunque un' equazione differenziale del secondo ordine può esser dedotta da due equazioni del primo, ciascuna delle quali contenga una costante di più di lei.

Avendosi poi queste due equazioni differenziali di primo, si potrà coll' eliminare da esse il $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ *trovare l' equazione finita, da cui tutte queste equazioni differenziali dipendono.*

E facil cosa passare all' eliminazioni di un maggior numero di costanti per mezzo dei differenziali degli ordini superiori: non ne parlo, ed osservo soltanto che l' equazioni differenziali, le quali contengono delle costanti di meno dell' equazione finita, risguardar debbonsi come più generali di essa, giacchè non dipendono dal valore di quelle costanti svanite.

§ 23. Veniamo alla differenziazione delle funzioni a più variabili.

Sia $F(x, y)$ una funzione delle due variabili x, y indipendenti tra loro: potremo prenderne i differenziali e rispetto all' x, e rispetto all' y, e rispetto ad ambedue. Rappresentando con z questa funzione, i di lei differenziali rispetto all' x sono espressi da

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dx, \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2, \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) dx^3 \ldots . \left(\frac{d^nz}{dx^n}\right) dx^n.$$

L' intervento della y non altera i risultamenti di queste differenziazioni, poichè essendo essa y indipendente dall' x, debbe aversi per costante nel differenziare a riguardo dell' x.

I differenziali poi della stessa z a riguardo dell' y sono espressi da

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) dy, \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) dy^2, \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) dy^3, \ldots \left(\frac{d^nz}{dy^n}\right) dy^n.$$

A questi differenziali si aggiunge il nome di *parziali*, per indicare che la differenziazione vi è fatta parzialmente per l' una o per l' altra variabile.

Ora il differenziale del primo ordine $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx$ altro non è che una funzione di x e di y moltiplicata per dx: indichiamola per udx. Il dx è, come sappiamo, l' aumento indeterminato della variabile x, il quale risguardasi come costante, e quindi niun cambiamento riceve da quei che possono ricevere le variabili: lo stesso si direbbe del dy. Se di quella funzione udx prendiamo il differenziale a riguardo dell' y, avremo $\left(\frac{du}{dy}\right) dxdy$ ovvero

$$\left\{\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy}\right\} dxdy$$ avendo sostituito all' u il $\left(\frac{dz}{dx}\right)$.

Questa espressione si è convenuto di scriverla così $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy$, indicando per d^2 la doppia operazione che si fa sopra z, differenziandola prima per rapporto all' x, poi per rapporto all' y: una tale differenziale dicesi *differenziale parziale seconda* o *del secondo ordine.*

Nella stessa guisa scriveremo $\left(\frac{d^{n+1}z}{dx^n dy}\right)dx^n dy$ per significare la differenziale parziale dell' ordine $(n+1)^{esimo}$, presa n volte rispetto all' x, ed una rispetto all' y, e così $\left(\frac{d^{n+m}z}{dx^n dy^m}\right)dx^n dy^m$ c' indicherà la differenziale parziale dell' ordine $(n+m)^{esimo}$, presa n volte per rapporto all' x, ed m per rapporto all' y. Per esempio: se facciamo $z=\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$, avremo due differenziali parziali del primo ordine

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)dx=-\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}};\ \left(\frac{dz}{dy}\right)dy=-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}$$

e tre differenziali parziali del secondo

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2=\frac{(y^2-a^2)dx^2}{\sqrt{(a^2-y^2-x^2)^3}};\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2=\frac{(x^2-a^2)dy^2}{\sqrt{(a^2-y^2-x^2)^3}};$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy=\frac{-xydxdy}{\sqrt{(a^2-y^2-x^2)^3}}.$$

§ 24. $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy$ indica il differenziale secondo della funzione z, preso prima differenziando rispetto alla variabile x, e poi rispetto all' y; nello stesso modo $\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)dydx$ indica il differenziale secondo di

z preso prima differenziando per riguardo all' y, poi all' x. Ora si può dimostrare che $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)dydx$, ovvero $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$.

In fatti il teorema di Taylor ci dà

$$F(x+dx,y) = F(x,y) + \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2} + \text{ecc.};$$

e facendo nei due membri di questa equazione aumentare y di dy, si ha in virtù del medesimo teorema,

$$F(x+dx,y+dy) = F(x,y) + \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{1}, \text{ ec.}$$
$$+ \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)dxdy, \text{ ecc.}$$
$$+ \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2}, \text{ ecc.}$$

Lo stesso teorema ci dà

$$F(x,y+dy) = F(x,y) + \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2} + \text{ec.}$$

e poi

$$E(x+dx,y+dy) = F(x,y) + \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{2}, \text{ ec.}$$
$$+ \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \left(\frac{d^2F}{dydx}\right)dydx, \text{ ecc.}$$
$$+ \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{2}, \text{ ecc.}$$

Ora questi due sviluppi dovendo essere identici termine per termine, avremo

$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)dxdy = \left(\frac{d^2F}{dydx}\right)dydx$ come annunziammo.

Dunque nel prendere un differenziale parziale del secondo ordine rispetto a due diverse variabili x, y, *si può cominciare indifferentemente da* x *o da* y *come si vuole, e si perviene sempre allo stesso risultamento.*

§ 25. Differenziando per rapporto all' x i due membri dell' equazione $\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)dxdy=\left(\frac{d^2F}{dydx}\right)dydx$, si avrà $\left(\frac{d^3F}{dxdydx}\right)dxdydx=\left(\frac{d^3F}{dydx^2}\right)dydx^2$;

ora facendo $u=\left(\frac{dF}{dx}\right)$ il teorema dimostrato ci dà $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)$, e sostituendo all' u il suo valore, si trova $\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)=\left(\frac{d^3F}{dxdydx}\right)$: avremo pertanto $\left(\frac{d^3F}{dx^2dy}\right)dx^2dy=\left(\frac{d^3F}{dxdydx}\right)dxdydx=\left(\frac{d^3F}{dydx^2}\right)dydx^2$;

dunque nel prendere un differenziale parziale del terzo ordine due volte per riguardo all' x *ed una per riguardo all'* y, *si può prima incominciare da* x, *poi passare ad* y, *poi tornare ad* x: *oppure differenziare subito due volte per rapporto all'* x *e poi passare all'* y: *oppure differenziare prima per rapporto all'* y, *e poi due volte di seguito per rapporto all'* x.

In generale: *Se debbe prendersi una differenziale parziale dell' ordine* $(m+n)^{esimo}$, *preso* m *volte rispetto all'* x *ed* n *volte rispetto all'* y, *è indifferente la via da seguirsi nel fare queste differenziazioni: si può incominciare a differenziare rispetto ad una variabile un certo numero di volte, poi passare alle differenziazioni per altra variabile, quindi tornare a differenziare rispettto alla prima in quell' ordine che più ci piace, purchè alla fine delle differenziazioni fatte, quelle per la* x *siano* m *di numero, e quelle per la* y *di numero* n.

§ 26. Un leggiero esame sopra lo sviluppo di $F(x+dx, y+dy)$ del § 24 basta a farci concludere che una funzione z di due variabili x, y ha due differenziali parziali del primo ordine; tre del secondo; quattro del terzo, ecc.

Alla somma dei due differenziali parziali del primo ordine si dà il nome di *differenziale totale*, e s' indica questo semplicemente con dz, di modo che si ha $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$.

Se poi della differenziale totale del primo ordine della funzione z si prende il differenziale parziale rapporto all' x, e si somma col differenziale parziale della medesima preso a riguardo dell' y, si ha una funzione che chiamasi il differenziale *totale del secondo ordine*, e s' indica con d^2z, per cui si ha

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) dy^2.$$

Con la stessa regola trovansi i differenziali totali degli ordini superiori, e generalmente rappresentando per d^mz un differenziale totale dell' ordine m^{esimo}, si ha

$$d^mz = \left(\frac{d^mz}{dx^m}\right) dx^m + m\left(\frac{d^mz}{dx^{m-1}dy}\right) dx^{m-1} dy$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{d^mz}{dx^{m-2}dy^2}\right) dx^{m-2} dy^2 + \ldots + \left(\frac{d^mz}{dy^m}\right) dy^m.$$

Dopo tutto questo è facile vedere che potremo porre lo sviluppo del § 24 sotto questa forma più semplice

$$z + dz + \frac{d^2z}{2} + \frac{d^3z}{2\cdot3} + \frac{d^4z}{2\cdot3\cdot4} + \text{ecc.},$$

ove $z = F(x, y)$, e dz, d^2z, d^3z, ecc. indicano i differenziali totali del primo, secondo, terzo, ecc. ordine.

Si riconosce ora la necessità del simbolo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ onde rappresentare il differenziale della z, preso solamente riguardo all' x, e diviso per dx: senza quelle due parentesi $\frac{dz}{dx}$ lo avremmo potuto confondere col rapporto geometrico del differenziale totale della stessa z all'aumento indeterminato dell' x.

§ 27. Per le funzioni composte di un maggior numero di variabili si potrebbero fare simili considerazioni. In generale essendo $z = F(x, y, u, \omega, \text{ecc.})$ eguale, cioè, ad una funzione di quante si vogliono variabili x, y, u, ω, ecc., le espressioni $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)dy$, $\left(\frac{dz}{du}\right)du$, ecc. indicheranno i di lei differenziali parziali del primo ordine presi a riguardo dell' x, dell' y, dell' u, ecc.; e l' espressione $\left(\frac{d^{n+m+l}z}{dx^n dy^m du^l}\right)dx^n dy^m du^l$ indicherà il differenziale parziale dell' ordine $(n+m+l)^{esimo}$ preso n volte a riguardo dell' x; m a riguardo dell' y; ed l a riguardo dell' u; è poi indifferente l' ordine da seguirsi nel fare queste $m+n+l$ differenziazioni.

L' espressione in fine $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy + \left(\frac{dz}{du}\right)du +$ ecc., ch' è l' aggregato dei differenziali parziali del primo ordine, rappresenta il differenziale totale della funzione z.

Non sarà inutile che il lettore si eserciti nel fare alcuni esempj.

CAPO III.

Differenziali dell' equazioni con qualunque numero di variabili.

§ 28. Essendo V una funzione degl' x, y, z, l'equazione $V=0$ sarà un' equazione con tre variabili, una delle quali potrà considerarsi qual funzione delle altre due, queste essendo tra loro indipendenti.

Ora noi abbiamo veduto (15) che sussistendo l' equazione $V=0$, sussiste insieme con essa l' equazione differenziale del primo ordine

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) dx = 0,$$

che si ottiene differenziando la proposta con la supposizione dell' y costante. Questa equazione si chiama il differenziale parziale di $V=0$, preso per la variabile x; e qui, a scanso di equivoco, avverto che le parole *per riguardo alla variabile*, *rispetto alla variabile*, *per rapporto alla variabile*, *relativamente alla variabile*, *per la variabile* significano lo stesso.

Nel modo stesso differenziando la proposta per y, supponendo x costante, si avrà

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) dy = 0,$$

che sarà il differenziale parziale di primo ordine per y.

Dunque con l' equazione $V=0$ sussistono anche le due $(1)=0$, $(2)=0$; e se sommiamo queste due equazioni, avremo una nuova equazione $(1)+(2)=0$, cioè

$$(3) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) dy = 0$$

la quale sussisterà insieme con esse.

Questa equazione (3) = o è la differenza totale del primo ordine della proposta $V = o$, che possiamo anche semplicemente indicare con $dV = o$. Se poi si riflette che z è una funzione dell' x e dell' y, per cui il differenziale totale di z è

$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$, e se ne fa la sostituzione nella detta equazione (3) = o, ella si ridurrà a

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = o:$$

La differenziale totale adunque dell' equazione V = o *si ha eguagliando a zero la somma dei tre differenziali parziali del primo membro* V, *presi per* x, *per* y *e per* z, *non altrimenti che se queste variabili fossero state considerate come indipendenti tra loro.*

Per esempio, si dimanda il differenziale totale dell' equazione della sfera, cioè dell' equazione $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = o$, e si trova $2(x-a)\,dx + 2(y-b)\,dy + 2(z-c)\,dz = o$, ove

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

§ 29. Tutte l' equazioni che possono aversi combinando in qualunque modo le tre equazioni

$V = o$,

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) = o,$$

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = o,$$

hanno luogo insieme con queste, e chiamansi equazioni coi *differenziali parziali del primo ordine*; in generale si dà il nome di equazione coi *differenziali parziali del primo ordine* a quella che contiene $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

L' equazioni che possono farsi con le suddette tre equazioni, sono infinite di numero; e noi potremmo dimostrare per queste alcuni bellissimi teoremi simili a quei che dimostrammo per le equazioni differenziali semplici (18, 20); ma per non estenderci di soverchio tratteremo soltanto di quelle combinazioni che servono all' eliminazione delle costanti e delle funzioni.

Se l' equazione $V=0$ contiene due costanti a, b, potremo sempre, col mezzo di essa e delle equazioni (1), (2) da lei ricavate con le differenziazioni, eliminare le dette costanti, ed ottenere una equazione coi differenziali del primo ordine che non contenga alcun indizio di quelle due costanti.

Così volendo dall' equazione della sfera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

eliminare le due costanti r e c, si ottiene l' equazione

$$(x-a)\left(\frac{dz}{dy}\right)-(y-b)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Quest' ultima equazione è molto più generale di quella da cui è ricavata; imperciocchè essa è indipendente dal valore delle due costanti che sonosi eliminate.

§ 30. Se l'equazione $V=0$, oltre le variabili x, y, z, conterrà una funzione $\phi(p)$ della quantità p, essendo pure essa funzione degl' y, x, z, si potranno sempre da essa aver l' equazioni

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left\{\left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dp}{dx}\right)\right\}\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dV}{d\phi}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\left(\frac{dp}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dp}{dy}\right)\right\}\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\left(\frac{dV}{d\phi}\right)=0,$$

{ϕ fa le veci di $\phi(p)$}, la prima delle quali è il differenziale parziale di $V=0$ preso per la x e diviso con dx, e l'altra è quello per la y e diviso con dy; e con queste tre equazioni, eliminando le due funzioni $\phi(p)$, $\left(\frac{d\phi}{dp}\right)$, otterremo un'equazione coi differenziali parziali del primo ordine, senza alcun indizio della funzione $\phi(p)$, e quindi indipendente da lei.

Per esempio, onde eliminare dalla equazione $z-y\phi(x^2+y^2)+xy=0$ la funzione $\phi(x^2+y^2)$ se ne prendano i differenziali primi, ed avremo (fatto $p=x^2+y^2$) queste altre due equazioni

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)-y\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\cdot 2x+y=0;$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)-\phi(p)-\left(\frac{d\phi}{dp}\right)\cdot 2y^2+x=0;$$

con queste e con la proposta elimineremo $\phi(p)$, $\left(\frac{d\phi}{dp}\right)$; otterremo allora

$$xy\left(\frac{dz}{dy}\right)-y^2\left(\frac{dz}{dx}\right)-xz-y^3=0$$

in cui non si troverà più $\phi(x^2+y^2)$.

Se la funzione fosse $\phi(p,q)$, essendo p, q funzioni delle variabili x, y, z, non l'avremmo potuta eliminare per mezzo dei differenziali parziali. Non faccio il calcolo, ma sarà bene che vi si eserciti il lettore, tanto più che avremo altrove bisogno di questa verità.

§ 31. Riprendiamo le tre equazioni

$V=0$,

$$(1)\ldots\ldots\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$(2)\ldots\ldots\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

Ora ciascuna di queste due ultime equazioni può differenziarsi e per x e per y: così sussistendo le equazioni (1), (2), sussisteranno anche le quattro equazioni che potrebbero da esse ricavarsi, le quali sono: 1.ª il differenziale parziale dell' equazione (1) preso per x; 2.ª quello della stessa preso per la y; 3.ª il differenziale parziale dell' equazione (2) preso per la x; 4.ª quello della stessa preso per l' y. Di queste quattro equazioni la 2.ª e la 3.ª sono identicamente la stessa cosa, poichè ciascuna di esse è il differenziale parziale del secondo ordine di $V=0$ preso una volta per x, l'altra per y; la 1.ª è il differenziale parziale del secondo ordine preso due volte per x; e la 4.ª è il differenziale del secondo ordine della stessa $V=0$, preso due volte per y.

Dunque sussistendo tra le variabili x, y, z una equazione $V=0$, sussisteranno anche nel medesimo tempo le due equazioni le quali esprimono i suoi differenziali parziali del primo ordine, e le tre che esprimono i differenziali parziali del secondo ordine.

Lo stesso ragionamento ci conduce a questo teorema generale.

Sussistendo fra tre variabili x, y, z *una qualunque equazione* V = 0, *sussisterà ed avrà luogo insieme con essa un di lei differenziale parziale qualunque dell' ordine* $(m+n)^{\text{esimo}}$ *preso* m *volte per* y, *ed* n *volte per* x.

Tutte queste equazioni coi differenziali parziali, le quali sussistono insieme con la $V=0$, possono anche combinarsi in mille modi tra loro, ed ogni combinazione darà una nuova equazione coi differenziali parziali *del primo ordine* se essa contiene $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, ovvero $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ del *secondo* se contiene $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, ovvero $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, ovvero $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, e così via discorrendo. Queste nuove equazioni poi sussisteranno con la proposta $V=0$.

Queste combinazioni sono infinite di numero, e dipendono dall'arbitrio del geometra. Ordinariamente però non si considerano che quelle le quali servono all'eliminazione delle costanti, ed all'eliminazione delle funzioni, come abbiamo veduto nel § antecedente. Ne parleremo quando ne avrem bisogno.

§ 32. In generale se z è una funzione di quante si vogliono variabili x, y, u, t, ecc., data dall'equazione $V=0$, essendo V una funzione di x, y, u, t, ecc., z, si avranno i di lei differenziali parziali

$$\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\}dx=0 \text{ per la } x,$$

$$\left\{\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}dy=0 \text{ per la } y,$$

$$\left\{\left(\frac{dV}{du}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{du}\right)\right\}du=0 \text{ per la } u,$$

che saranno altrettante equazioni che sussistono insieme con essa. Differenziando questi differenziali parziali primi, si avrebbero i differenziali parziali del secondo ordine; e questi differenziali di nuovo ci darebbero i differenziali parziali del terzo ordine, e così di mano in mano.

Tutti questi differenziali parziali, e le combinazioni che si possono fare con essi, sono altrettante equazioni che sussistono insieme con la $V=0$, e che in conseguenza si riferiscono alla stessa relazione di variabili.

Se tutti quei differenziali parziali poi si sommeranno, avremo un' equazione cui si dà il nome di differenziale totale,

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dV}{dx}\right)dx+\left(\frac{dV}{dy}\right)dy+\left(\frac{dV}{du}\right)du+\text{ecc.}\\ +\left(\frac{dV}{dz}\right)\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{du}\right)du+\text{ec.}\right\}\end{array}\right\}=0$$

la quale sussisterà con la stessa $V=0$.

Ora essendo

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{du}\right) du + \text{ecc.} = dz\,;$$

dunque questo differenziale totale potrà anche esser rappresentato dall' equazione

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{du}\right) du + \text{ec.} + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = 0:$$

dunque *per avere il differenziale totale di una equazione* V = o, *nella quale il primo membro è funzione delle variabili* x, y, z, u, t, ecc., *conviene eguagliare a zero la somma di tutt' i differenziali parziali di esso primo membro* V, *presi per ciascuna variabile* (z *inclusivamente*) *come se questi fossero indipendenti tra loro.*

§ 33. Abbiamo detto (26) che il differenziale totale dz della z funzione di due variabili x, y indipendenti tra loro, è $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$;

quando poi quelle due variabili x, y non fossero indipendenti, e la y fosse funzione della x, le dottrine del § 9 ci danno il differenziale della stessa funzione z così $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$,

ove ponendo dy in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, si ha

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

Dunque il differenziale della z funzione di due variabili è sempre della medesima forma

$\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$, tanto se le due variabili sono indipendenti, quanto se una di esse è funzione dell' altra. L' unica differenza sta in questo, che nel

primo caso il dy significa un aumento arbitrario qualunque che nulla ha che fare col dx, e nel secondo il dy è eguale a $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, cioè al differenziale dell' y presa a riguardo dell' x.

In generale, se si ha una funzione z di quante si vogliono variabili x, y, u, t, ecc., l' espressione

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy + \left(\frac{dz}{du}\right) du + \text{ecc.}$$

indica nel tempo stesso o la differenziale totale, se tutte quelle variabili sono indipendenti, o la differenziale semplicemente, se tutte quelle variabili y, u, t, ecc. sono altrettante funzioni dell' x. La differenza consiste solo in questo: nel primo caso dx, dy, du, ecc. indicano degli aumenti indeterminati qualunque delle variabili indipendenti x, y, u, ecc.; e nel secondo dx è il solo aumento indeterminato che vi si trova, mentre dy, du, ecc., significano i differenziali $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$, $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$, ecc. delle funzioni y, u, ecc., presi per la x.

Se dunque sarà proposta una espressione differenziale di questa forma $Pdx + Qdy$, e vorremo sapere se essa è o non è il differenziale di una funzione z di due variabili x, y tanto pel caso che siano indipendenti, quanto per quello ch' esse siano una funzione dell' altra, ecco come faremo.

Il differenziale di una tal funzione z in ambedue i casi ha questa forma $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$; converrà dunque che P e Q siano tali che, prendendo $P = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, ne venga $Q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Ora si ha $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$; ed essendo (25)

$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$, ne verrà $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; dunque perchè $Pdx + Qdy$ possa essere considerato come un differenziale totale di una funzione di due variabili x, y, cioè come l'aggregato di due differenziali parziali, o come il differenziale di una funzione composta, converrà che sia soddisfatta questa condizione, che, cioè, il coefficiente P del dx differenziato per y e diviso con dy, sia eguale al coefficiente Q del dy differenziato per x e diviso con dx. Ad una tal condizione si dà il nome di *criterio*.

Generalmente poi si può dimostrare che l'espressione differenziale $Pdx + Qdy + Rdu +$ ecc. sarà il differenziale totale di una funzione z delle variabili x, y, u, ecc., ovvero il differenziale esatto della funzione composta z se saranno soddisfatti questi criterj

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),\ \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right),\ \text{ecc.}$$

$$\left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right),\ \text{ecc.}$$

In fatti quell' espressione differenziale avrà l'indicato pregio, se prendendo $P = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, ne segua $Q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, $R = \left(\frac{dz}{du}\right)$, ecc.

Ora in questo caso avendosi $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)$, $\left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{d^2z}{dxdu}\right)$, $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dudx}\right)$, $\left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{d^2z}{dydu}\right)$, $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dudy}\right)$, ecc., le dottrine del § 25 ci daranno gli assegnati criterj.

Questi criterj sono egualmente quelli che debbono sussistere onde un' equazione differenziale del primo ordine

$Pdx + Qdy + Rdu + Sdt +$ ecc. $+ Zdz = 0$

sia o la differenziale totale, cioè l' aggregato dei differenziali parziali di un' equazione $V = 0$ tra le variabili x, y, u, t, ecc., z, riguardando z come funzione di tutte le altre, e queste indipendenti tra loro; oppure la differenziale della stessa equazione, riguardandosi tutte le variabili y, u, t, ecc., z come funzioni della x.

In quel primo caso dz tiene il luogo del $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy + \left(\frac{dz}{du}\right)du +$ ecc., e nel secondo dy, du, ecc. dz tengono luogo di $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$, ecc. $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$.

§ 34. Nei differenziali delle funzioni e dell' equazioni degli ordini superiori al primo non avviene, come in questo, che per conoscere se una funzione differenziale è la differenziale esatta di una funzione z delle variabili x, y, u, ecc., essendo queste indipendenti tra di loro, abbiansi i criterj medesimi, i quali si hanno per assicurarsi se quella funzione differenziale è la differenziale esatta della stessa z, quando le variabili y, u, ecc. sono funzioni della x. Non mi fermerò a dimostrarlo, giacchè basta, supponendo $z = f(x, y)$ ed y funzione di x, prendere il differenziale secondo di z, che lo ritroveremo diverso dal differenziale secondo totale (26) della medesima z, poste le variabili x, y indipendenti tra loro.

§ 35. Proponiamoci ora di trovare le condizioni o i criterj che debbono sussistere acciò una funzione differenziale di un ordine qualunque, comprendendo un numero qualunque di variabili x, y, u, ecc., t, delle quali y, u, ecc., t sono funzioni della prima x, sia un differenziale esatto.

Sia

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=p\,,\ \left(\frac{dp}{dx}\right)=q\,,\ \ldots\ \left(\frac{ds}{dx}\right)=t\,;$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=p'\,,\ \left(\frac{dp'}{dx}\right)=q'\,,\ \ldots\ \left(\frac{ds'}{dx}\right)=t'\,;$$

ecc. ecc.

Indicando per β una funzione di x, y, u ecc., p, q, ..., t, p', q', ... t', supponiamo che βdx sia il differenziale di una funzione z dell' ordine immediatamente inferiore, ed avremo $\beta dx = dz$. Per dz noi vogliamo intendere il differenziale della z presa rispetto a tutte le quantità che essa contiene; così in generale se M è una funzione delle quantità x, y, u ecc., per dM indichiamo il differenziale $\left(\frac{dM}{dx}\right)dx + \left(\frac{dM}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx +$ ecc.; siccome poi z non contiene t, t' ecc., sarà

$$\begin{aligned}\beta dx = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx &+ \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)dx + \ldots + \left(\frac{dz}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)dx\\ &+ \left(\frac{dz}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \ldots + \left(\frac{dz}{ds'}\right)\left(\frac{ds'}{dx}\right)dx\\ &+ \text{ecc.},\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\beta = \left(\frac{dz}{dx}\right) &+ \left(\frac{dz}{dy}\right)p + \left(\frac{dz}{dp}\right)q + \ldots + \left(\frac{dz}{ds}\right)t\\ &+ \left(\frac{dz}{du}\right)p' + \left(\frac{dz}{dp'}\right)q' + \ldots + \left(\frac{dz}{ds'}\right)t'\\ &+ \text{ecc.}\end{aligned}$$

Io faccio

$$\begin{aligned}d\beta = Mdx + N\left(\frac{dy}{dx}\right)dx &+ P\left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \ldots + T\left(\frac{dt}{dx}\right)dx\\ + N'\left(\frac{du}{dx}\right)dx &+ P'\left(\frac{dp'}{dx}\right)dx + \ldots + T'\left(\frac{dt'}{dx}\right)dx\\ + \text{ecc.},\end{aligned}$$

ed è chiaro che sarà $\Big\{$ avvertendo che prese per ω, θ due variabili qualunque, di quelle che compongono la funzione z, è sempre $\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\theta d\omega}\right)\Big\}$

$$N=\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=$$

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)p+\left(\frac{d^2z}{dpdy}\right)q+\ldots+\left(\frac{d^2z}{ds\,dy}\right)t$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dudy}\right)p'+\left(\frac{d^2z}{dp'dy}\right)q'+\ldots+\left(\frac{d^2z}{ds'dy}\right)t'$$
$$+\text{ecc.}=\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{dz}{dy}\right);$$

$$P=\left(\frac{d\beta}{dp}\right)=\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dxdp}\right)+\left(\frac{d^2z}{dydp}\right)p+\left(\frac{d^2z}{dp^2}\right)q+\ldots\ldots+\left(\frac{d^2z}{ds\,dp}\right)t$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dudp}\right)p'+\left(\frac{d^2z}{dp'dp}\right)q'+\ldots\ldots+\left(\frac{d^2z}{ds'dp}\right)t'$$
$$+\text{ecc.}=\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dz}{dp}\right);$$

$$Q=\left(\frac{d\beta}{dq}\right)=\left(\frac{dz}{dp}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dxdq}\right)+\left(\frac{d^2z}{dydq}\right)p+\left(\frac{d^2z}{dpdq}\right)q+\ldots\ldots+\left(\frac{d^2z}{ds\,dq}\right)t$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dudq}\right)p'+\left(\frac{d^2z}{dp'dq}\right)q'+\ldots\ldots+\left(\frac{d^2z}{ds'dq}\right)t'$$
$$+\text{ecc.}=\left(\frac{dz}{dp}\right)+\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dz}{dq}\right)$$

. . . .

$$T=\left(\frac{d\beta}{dt}\right)=\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Si troverà nella medesima maniera

$$N' = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{du}\right), P' = \left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dp'}\right),$$

$$Q' = \left(\frac{dz}{dp'}\right) + \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dq'}\right), T' = \left(\frac{dz}{ds'}\right) \text{ ecc.};$$

Se β è funzione soltanto dell'y, x, p; p non entrerà in z, ed a cagione di

$$N = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dy}\right), \frac{1}{dx} dP = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dy}\right), \text{ s' avrà}$$

$$N - \frac{1}{dx} dP = 0.$$

Supponiamo β funzione dell'y, x, p, q; q non entrerà allora in z, ed a cagione di

$$N = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$\frac{1}{dx} dP = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{dz}{dp}\right),$$

$$\frac{1}{dx^2} d^2 Q = \frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{dz}{dp}\right), \text{ s' avrà}$$

$$N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2 Q = 0.$$

In generale β essendo una funzione di un ordine qualunque e comprendendo un numero qualunque di variabili, come abbiamo supposto in principio, avremo

$$N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2 Q - \frac{1}{dx^3} d^3 R + \text{ecc.} = 0$$

$$N' - \frac{1}{dx} dP' + \frac{1}{dx^2} d^2 Q' - \frac{1}{dx^3} d^3 R' + \text{ecc.} = 0;$$

ecc. ecc.

E vi saranno tante di queste equazioni di condizione quante sono le variabili meno una, che è quella della quale si considerano funzioni tutte le altre, e rispetto alla quale si fanno le differenziazioni.

Questo bel teorema è d' Eulero. Condorcet ne ha dato il primo la dimostrazione diretta nel suo calcolo integrale, e ne tira le conseguenze seguenti.

§ 36. Se βdx^2 è il differenziale d' una funzione z' d' un ordine inferiore di due unità, a cagione di $zdx = dz'$ s' avrà

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) - \frac{1}{dx}\, d\left(\frac{dz}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\, d^2\left(\frac{dz}{dq}\right) - \text{ecc.} = 0:$$

ora è facile a vedersi che

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = P - \frac{1}{dx}\, dQ + \frac{1}{dx^2}\, d^2R - \frac{1}{dx^3}\, d^3S + \text{ecc.}$$

$$\left(\frac{dz}{dp}\right) = \qquad Q - \frac{1}{dx}\, dR + \frac{1}{dx^2}\, d^2S + \text{ecc.}$$

$$\left(\frac{dz}{dq}\right) = \qquad R - \frac{1}{dx}\, dS + \text{ecc.}$$

ecc. ecc.

Dunque sostituendo questi valori nell' equazione precedente, otterremo

$$P - \frac{2}{dx}\, dQ + \frac{3}{dx^2}\, d^2R - \frac{4}{dx^3}\, d^3S + \text{ecc.} = 0.$$

Sia βdx^3 il differenziale d' un ordine inferiore di tre unità, sarà allora zdx^2 il differenziale d' un ordine inferiore di due unità, e perciò

$$\left(\frac{dz}{dp}\right) - \frac{2}{dx}\, d\left(\frac{dz}{dq}\right) + \frac{3}{dx^2}\, d^2\left(\frac{dz}{dr}\right) - \text{ecc.} = 0;$$

sostituendo per $\left(\frac{dz}{dp}\right)$, $\left(\frac{dz}{dq}\right)$ ecc. i loro valori, si ottiene l' equazione di condizione

$$Q - \frac{3}{dx}\, dR + \frac{6}{dx^2}\, d^2S - \text{ecc.} = 0.$$

Continuando lo stesso andamento, vedremo che se βdx^2 è il differenziale di una funzione d'un ordine inferiore di un numero n d'unità, s'avrà per la variabile y (è lo stesso per le variabili u, ecc.) questo numero d'equazioni di condizione

$$(A)\ldots\ldots N - \frac{1}{dx}\, dP + \frac{1}{dx^2}\, d^2Q - \frac{1}{dx^3}\, d^3R + \frac{1}{dx^4}\, d^4S - \text{ec.} = 0$$

$$(B)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} P - \frac{2}{dx}\, dQ + \frac{3}{dx^2}\, d^2R - \frac{4}{dx^3}\, d^3S + \text{ec.} = 0 \\ Q - \frac{3}{dx}\, dR + \frac{6}{dx^2}\, d^2S - \text{ec.} = 0 \\ R - \frac{4}{dx}\, dS + \text{ec.} = 0 \end{cases}$$

I coefficienti delle equazioni (B) sono: nella prima i numeri naturali; nella seconda i numeri triangolari; nella terza i numeri piramidali, e così di seguito. Ci sarà utilissimo chiarire tutta questa teorica col mezzo di alcuni esempj.

§ 37. Sia primieramente la funzione differenziale del primo ordine

$n\left(\frac{dy}{dx}\right) dx + mdx$, ed avremo $\beta = np + m$, e per conseguenza $N = \left(\frac{d\beta}{dy}\right) = \left(\frac{dn}{dy}\right) p + \left(\frac{dm}{dy}\right)$, $P = \left(\frac{d\beta}{dp}\right) = n$;

sostituendo questi valori in $N - \frac{1}{dx}\, dP = 0$, si otterrà

$\left(\frac{dn}{dy}\right) p + \left(\frac{dm}{dy}\right) = \left(\frac{dn}{dx}\right) + \left(\frac{dn}{dy}\right) p$, ovvero

$\left(\frac{dm}{dy}\right) = \left(\frac{dn}{dx}\right)$, come abbiam trovato sopra (33).

Io prendo per secondo esempio la funzione differenziale del secondo ordine $(nq + m)\,dx^2$. Si ha

$$N = \left(\frac{dn}{dy}\right) q + \left(\frac{dm}{dy}\right),\ P = \left(\frac{dn}{dp}\right) q + \left(\frac{dm}{dp}\right),\ Q = n;$$

ed in conseguenza

$$\frac{1}{dx} dP = \frac{1}{dx} \left\{ \left(\frac{d^2n}{dpdx}\right) q dx + \left(\frac{d^2n}{dpdy}\right) q \left(\frac{dy}{dx}\right) dx \right.$$
$$+ \left(\frac{d^2n}{dp^2}\right) q \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dn}{dp}\right) \left(\frac{dq}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2m}{dpdx}\right) dx$$
$$\left. + \left(\frac{d^2m}{dpdy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) dx \right\} = \left(\frac{d^2n}{dpdx}\right) q$$
$$+ \left(\frac{d^2n}{dpdy}\right) qp + \left(\frac{d^2n}{dp^2}\right) q^2 + \left(\frac{dn}{dp}\right) \left(\frac{dq}{dx}\right)$$
$$+ \left(\frac{d^2m}{dpdx}\right) + \left(\frac{d^2m}{dpdy}\right) p + \left(\frac{d^2m}{dp^2}\right) q$$

$$\frac{1}{dx} dQ = \left(\frac{dn}{dx}\right) + p \left(\frac{dn}{dy}\right) + q \left(\frac{dn}{dp}\right),$$

$$\frac{1}{dx^2} d^2Q = \left(\frac{d^2n}{dx^2}\right) + 2p \left(\frac{d^2n}{dxdy}\right) + 2q \left(\frac{d^2n}{dxdp}\right) + p^2 \left(\frac{d^2n}{dy^2}\right)$$
$$+ 2pq \left(\frac{d^2n}{dydp}\right) + q \left(\frac{dn}{dy}\right) + q^2 \left(\frac{d^2n}{dp^2}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dn}{dp}\right):$$

ora sostituendo questi valori nell' equazione

$$N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2Q = 0\text{, troviamo}$$

$$\left(\frac{dn}{dy}\right) q + \left(\frac{dm}{dy}\right) - \left(\frac{dn}{dp}\right) \left(\frac{dq}{dx}\right) - q \frac{1}{dx} d\left(\frac{dn}{dp}\right)$$
$$- \frac{1}{dx} d\left(\frac{dm}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2n = 0.$$

Eseguendo le differenziazioni indicate, e riducendo quest' equazione, diviene essa

$$q\left\{2\left(\frac{dn}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2n}{dpdx}\right)+p\left(\frac{d^2n}{dpdy}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{dm}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dpdx}\right)-p\left(\frac{d^2m}{dpdy}\right)+\left(\frac{d^2n}{dx^2}\right)$$
$$+2p\left(\frac{d^2n}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2n}{dy^2}\right)=0.$$

Ma le funzioni m ed n non dovendo contenere q, questa equazione non può essere identica, senza che il coefficiente di q vada a zero da sè medesimo: questa equazione dovrà dunque necessariamente dividersi in due altre le quali saranno

$$(a)\ \ldots\ 2\left(\frac{dn}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)+\left(\frac{d^2n}{dpdx}\right)+p\left(\frac{d^2n}{dpdy}\right)=0$$
$$(b)\ \ldots\ \left(\frac{dm}{dy}\right)-\left(\frac{d^2m}{dpdx}\right)-p\left(\frac{d^2m}{dpdy}\right)+\left(\frac{d^2n}{dx^2}\right)$$
$$+2p\left(\frac{d^2n}{dxdy}\right)+p^2\left(\frac{d^2n}{dy^2}\right)=0.$$

Se la funzione differenziale del secondo ordine debbe di più essere il differenziale di una funzione di y e di x, allora a cagione di $P-\frac{2}{dx}dQ=0$, sarà di più

$$(c)\ \ldots\ \left(\frac{dm}{dp}\right)-q\left(\frac{dn}{dp}\right)-2\left(\frac{dn}{dx}\right)-2p\left(\frac{dn}{dy}\right)=0.$$

§ 38. Nei differenziali esatti delle funzioni omogenee ha luogo una proprietà che è ad esse propria e particolare.

Si chiama funzione omogenea quella nella quale la somma delle dimensioni delle variabili è in

ciascun termine la medesima; $x^3 + ax^2y + bxy^2$ è funzione omogenea di tre dimensioni, tale essendo la somma delle dimensioni di ciascun termine.

Qualunque funzione omogenea del numero n di dimensioni tra due variabili x, y, se vi facciamo $y = qx$, prende questa forma Qx^n, essendo Q una funzione di q. Così fatta questa sostituzione nella funzione omogenea presa per esempio, essa si cangia in $(1 + aq + bq^2)x^3$.

Ciò posto, sia $Ndx + M\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ la differenziale di una funzione omogenea z di due variabili x, y dell'ordine n. Facendo in questa differenziale $y = qx$, pel che si ha $\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = qdx + x\left(\frac{dq}{dx}\right)dx$, abbiasi $M'\left\{qdx + x\left(\frac{dq}{dx}\right)dx\right\} + N'dx = d(Qx^n)$,

ovvero $(M'q + N')dx + M'x\left(\frac{dq}{dx}\right)dx = d(Qx^n)$.

Ora è chiaro che $(M'q + N')dx$ è il differenziale di Qx^n per rispetto ad x soltanto, dunque $M'q + N' = nQx^{n-1}$; e rimettendo in quest' ultima equazione $\frac{y}{x}$ in vece di q, si avrà $My + Nx = nz$; ovvero $\left(\frac{dz}{dy}\right)y + \left(\frac{dz}{dx}\right)x = nz$. Questa proprietà delle funzioni omogenee è generale per qualunque numero di variabili x, y, u, ecc., e si ha sempre, se n è il numero delle dimensioni della funzione z, si ha, dico, $\left(\frac{dz}{dx}\right)x + \left(\frac{dx}{dy}\right)y + \left(\frac{dz}{du}\right)u +$ ecc. $= nz$.

Per esempio: la funzione omogenea $\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3y^3}$,

la di cui dimensione è $-\frac{11}{2}$, ha per differenziale

$$-\frac{(5xy+6y^2)}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}dx-\frac{(5xy+6x^2)}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}dy;$$ debbe dunque essere

$$-\frac{(5xy+6y^2)x+(5xy+6x^2)y}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}=-\frac{11}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3y^3},$$

ciò che effettivamente è.

CAPO IV.

Sviluppo delle funzioni in serie.

§ 39. Indicando con $\phi(x)$ una qualunque funzione di x, il teorema di Taylor ci dà

$$(E)\ldots\phi(x+\theta)=\phi(x)+\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\cdot\theta+\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{\theta^2}{2}+\text{ec.},$$

qualunque sia la quantità θ, di cui aumenta x: potremo adunque per mezzo di questo teorema sviluppare in una serie ordinata per le potenze di θ qualunque funzione $\phi(x+\theta)$.

Se ora nella formola (E) facciamo $x=0$, si avrà

$$\phi(\theta)=\phi(0)+\theta\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{\theta^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)+\text{ecc.}$$

purchè nei coefficienti $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ a differenziazioni eseguite facciasi $x=0$. E siccome ϕ rappresenta una quantità qualunque, perciò riponendo in vece di θ la lettera x, si otterrà

$$(E)\ldots\phi(x)=\phi(0)+x\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{x^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)+\text{ec.}$$

Quest' ultima serve a sviluppare in serie qualunque funzione $\phi(x)$ dell' x, secondo le potenze crescenti ed intiere della variabile x.

Infinite sono le applicazioni che si potrebbero fare di queste formole generali, e ne incontreremo spessissimo in tutto questo Trattato; per questo non mi fermerò che a farne uso per isvolgere un arco in serie ordinata colle potenze del seno.

Sia dunque $\phi(x) = Arc.\,sen\,x$, e quindi $\phi(x+\theta) = Arc.\,sen\,(x+\theta)$.

La formola (E) ci darà

$$A.\,sen(x+\theta) = A.sen\,x + \left(\frac{dA\cdot sen\,x}{dx}\right)\theta$$
$$+ \left(\frac{d^2A\cdot sen\,x}{dx^2}\right)\frac{\theta^2}{2} + \left(\frac{d^3A\cdot sen\,x}{dx^3}\right)\frac{\theta^3}{2\cdot 3} + \text{ecc.};$$

e ponendovi i valori dei differenziali di *Ar. sen x*, i quali abbiamo trovati al (13), avremo

$$A.sen\,(x+\theta) = A.sen\,x + \frac{\theta}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x\theta^2}{2\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{(1+2xx)\theta^3}{2\cdot 3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(9x+6x^3)\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \text{ecc.}$$

La formola poi (F), nella quale a differenziazioni eseguite debbe farsi $x = 0$ nei coefficienti differenziali, ci darà

$$A\,sen\,x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{9x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{ecc.},$$

cioè l' arco espresso per le potenze del seno.

§ 40. Molte volte il calcolo differenziale si adopera unitamente al metodo dei coefficienti indeterminati, onde rendere più facile lo sviluppo delle funzioni in serie. Se ne troveranno molti esempj.

Io non ne riferisco qui che un caso dei più interessanti.

Vogliasi sviluppare in serie la funzione

$\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n$. Poniamo $\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n = y$, e presine i logaritmi e differenziando avremo
$n\,log\{x+\sqrt{(1+x^2)}\} = log\,y$,

$\frac{ndx}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$: di qui ricaveremo

$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - n^2y^2 = 0$, equazione che differenziata di nuovo ci dà

$$(1+x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right) - n^2y = 0.$$

Ora supponiamo

$\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n = y = 1 + nx + Ax^2 + Bx^3 + \text{ecc.}$ ed avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = n + 2Ax + 3Bx^2 + \text{ecc.}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2A + 2\cdot 3\,Bx + \text{ecc.},$$

i quali valori sostituiti nell' ultima equazione differenziale del secondo ordine, ed ordinata questa a seconda delle potenze di x, si ha

$$\left.\begin{matrix}+2A \\ -n^2\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}2\cdot 3B \\ +\ n \\ -\ n^2\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}3\cdot 4C \\ +\ 2A \\ +\ 2A \\ -\ n^2A\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}4\cdot 5D \\ +\ 2\cdot 3B \\ +\ 3B \\ -\ n^2B\end{matrix}\right\} x^3 + \text{ecc.} = 0.$$

donde si ricava $A = \frac{n^2}{2}$, $B = \frac{n(n^2-1)}{2\cdot 3}$, $C = \frac{A(n^2-4)}{3\cdot 4}$,

$D = \frac{B(n^2-9)}{4\cdot 5}$, $E = \frac{C(n^2-16)}{5\cdot 6}$ ecc., ovvero $A = \frac{n^2}{2}$,

$B = \frac{n}{2}\cdot\frac{n^2-1}{3}$, $C = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{n^2-4}{3\cdot 4}$, $D = \frac{n}{2}\cdot\frac{n^2-1}{3}\cdot\frac{n^2-9}{4\cdot 5}$ ecc.,

sarà dunque

$$\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n = 1 + nx + \frac{n^2}{2}x^2 + \frac{n}{2}\cdot\frac{n^2-1}{3}x^3$$
$$+ \frac{n^2}{2}\cdot\frac{n^2-4}{3\cdot 4}x^4 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \text{ecc.}$$

Per avere lo sviluppo in serie di $\{-x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n$ basterà far negativa la x nella serie ottenuta; e se noi indichiamo con z la quantità $\{-x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n$, vedremo subito che

$$\frac{z+y}{2}=1+\frac{n^2}{1\cdot2}x^2+\frac{n^2(n^2-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}x^6+\text{ec.}$$

$$\frac{y-z}{2}=nx+\frac{n(n^2-1)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot2\cdot3.4.5}x^5$$

$$+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^7+\text{ecc.}$$

Ora facciamo $x=\sqrt{(-1)}\cdot sen\,\phi$, e sarà $\sqrt{(1+x^2)}=\cos\phi$, quindi

$$y=\{\cos\phi+\sqrt{(-1)}\,sen\,\phi\}^n=\cos n\phi+\sqrt{(-1)}\cdot sen\,n\phi,$$

$$z=\{\cos\phi-\sqrt{(-1)}\cdot sen\,\phi\}^n=\cos n\phi-\sqrt{(-1)}\,sen\,n\phi;$$

avremo pertanto

$$\cos n\phi=1-\frac{n^2}{1\cdot2}sen\,\phi^2+\frac{n^2(n^2-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}sen\,\phi^4$$

$$-\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}sen\,\phi^6+\text{ecc.}$$

$$sen\,n\phi=n\,sen\,\phi-\frac{n(n^2-1)}{1\cdot2\cdot3}sen\,\phi^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot2\cdot3\cdot4.5}sen\,\phi^5-\text{ec.}$$

Queste serie c' insegnano a trovare i seni e coseni degli archi multipli quando si conoscono i seni degli archi semplici. La prima però di esse non termina mai se n è caffo, e la seconda se n è pari. Onde avere due serie buone anche per questi casi noi le differenzieremo, ed allora otterremo

$$sen\,n\phi=\cos\phi\cdot\Big(n\,sen\,\phi-\frac{n(n^2-4)}{2\cdot3}sen\,\phi^3$$

$$+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\,sen\,\phi^5+\text{ecc.}\Big)$$

$$\cos n\phi=\cos\phi\cdot\left(1-\frac{n^2-1}{2}sen\,\phi^2+\frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2\cdot3\cdot4}sen\,\phi^4+\text{ec.}\right).$$

Queste quattro formole poi sono vere qualunque valore si dia ad n.

§ 41. Le due formole (E), (F) che abbiamo date al § 39 finiscono quando alcuno di quei coefficienti differenziali è nullo, e lo sono ancora i differenziali successivi: eccettuato questo caso, esse vanno all'infinito.

Ora facilmente si comprende che commetteremo un errore nel fare uso di una serie infinita, della quale si prenderà soltanto un certo numero di termini trascurandone il restante, e che quest' errore sarà tanto maggiore, quanto è più grande il numero dei termini che si trascurano, o quanto è minore il numero di quelli che si ritengono. Accade in molte ricerche che per quanto la serie sia convergente, è necessario tener conto approssimatamènte di questo resto, o prescrivergli i limiti entro ai quali si ritrova, per poter fare un retto giudizio sopra l' errore che si commette nel trascurarlo.

Ecco a questo proposito un importantissimo teorema il quale, oltre a soddisfare al bisogno, ci somministra anche la maniera di dare alle serie una tal forma finita che i ragionamenti e le considerazioni appartenenti alle intiere loro somme, possono con tutto il rigore geometrico applicarsi alle medesime ridotte sotto quella forma medesima.

Indichiamo con $\phi'(x)$, $\phi''(x)$, $\phi'''(x)$, ... $\phi^{(n)}(x)$ le funzioni $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)$, ... $\left(\frac{d^n\phi}{dx^n}\right)$, e la formola ($E$) diverrà

$$\phi(x+\theta)=\phi(x)+\theta\phi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\phi''(x)+\frac{\theta^3}{2\cdot3}\phi'''(x)+.....$$

$$+\frac{\theta^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x)+\frac{\theta^n}{2.3\ldots n}\Big\{\varphi^{(n)}(x)$$

$$+\frac{\theta}{n+1}\varphi^{(n+1)}(x)+\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{(n+2)}(x)+\text{ecc.}\Big\}.$$

Supponiamo che, fermandoci al termine

$$\frac{\theta^{n-1}}{2\cdot 3\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x),$$

vogliasi stimare il resto che si trascura, e facciamo

$$R=\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{n+1}\varphi^{(n+1)}(x)$$

$$+\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{(n+2)}(x)+\text{ecc.}$$

Sviluppiamo in serie secondo le potenze di p la funzione $\varphi^{(n)}(x+p)$, essendo p una quantità qualunque, avremo

$$\varphi^{(n)}(x+p)=\varphi^{(n)}x+p\varphi^{(n+1)}x+\frac{p^2}{2}\varphi^{(n+2)}x+\text{ecc.}$$

Ciò premesso, si paragonino le tre serie, quella cioè che nasce dalla supposizione di $p=0$ nello sviluppo di $\varphi^{(n)}(x+p)$, quella che rappresenta il resto R da trascurarsi, e quella che nasce dallo sviluppo di $\varphi^{(n)}(x+p)$ facendovi $p=0$,

$$\varphi^{(n)}(x+0)=\varphi^{(n)}(x)+0+0+\text{ecc.}$$

$$R=\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{n+1}\varphi^{(n+1)}(x)$$

$$+\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{(n+2)}(x)+\ldots$$

$$\varphi^{(n)}(x+\theta)=\varphi^{(n)}(x)+\frac{\theta}{1}\varphi^{(n+1)}(x)$$

$$+\frac{\theta^2}{1\cdot 2}\varphi^{(n+2)}(x)+\ldots.$$

Alcuni o tutti i termini possono anche esser negativi. Quei però che si corrispondono, hanno sempre il medesimo segno. I primi termini di queste tre serie poi sono eguali. Rispetto agli altri, si vede che ciascuno dei termini della serie R, indipendentemente dal segno, è maggiore del corrispondente nella serie superiore $\phi^{(n)}(x+o)$, e minore del corrispondente nell' inferiore $\phi^{(n)}(x+\theta)$; dunque se in vece della quantità θ prendiamo nello sviluppo di $\phi^{(n)}(x+\theta)$ una quantità minore di essa, tutt' i termini di quello sviluppo diverranno minori, e si avvicineranno ad essere eguali ai termini corrispondenti nel valore di R; dunque se fingiamo che sia p quella quantità minore di θ, sarà R eguale a $\phi^{(n)}(x+p)$, supponendo p maggiore di o, e minore di θ; avremo allora

$$\phi(x+\theta)=\phi(x)+\theta\phi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\phi''(x)+\ldots\ldots+$$

$$\frac{\theta^{n-1}}{2.3\ldots.n-1}\phi^{(n+1)}(x)+\frac{\theta^n}{2.3\ldots.n}\phi^{(n)}(x+p)$$

essendo $p>o$, $<\theta$; per quanto adunque p sia una quantità indeterminata, sono però determinati i suoi limiti.

Ecco ora il teorema che se ne deduce.

TEOREMA.

§ 42. *La serie infinita dello sviluppo di $\phi(x+\theta)$, incominciando da un termine qualunque, è sempre eguale al valore di quello stesso termine, ponendovi $x+p$ in luogo di x; p essendo una quantità contenuta fra o e θ.*

Questo bel teorema potrà in molti casi bastare a calcolare il resto dei termini che non si ritengono in una serie, la cui convergenza non ci permette di trascurarli.

Facciamo nella formola qui trovata per lo sviluppo finito di $\phi(x+\theta)$, $x=0$, e quindi $\theta=x$, ed avremo lo sviluppo di una funzione $\phi(x)$ in serie secondo le potenze di x, espresso in termini finiti in questa guisa:

$$\phi(x)=\phi(0)+x\phi'0+\frac{x^2}{2}\phi''0+\frac{x^3}{2\cdot3}\phi'''0+\ldots\ldots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{2\cdot3\ldots(n-1)}\phi^{(n-1)}0+\frac{x^n}{2\cdot3\ldots n}\phi^{(n)}(p)$$

essendo p una quantità indeterminata contenuta fra zero e x, cioè $p>0$, $p<x$.

Siccome n può essere qualunque, così potremo terminare la serie al secondo, terzo, quarto, ecc. termine, come più ci piace; ed avremo

Per la serie che ci dà lo sviluppo di $\phi(x+\theta)$,

$$\phi(x+\theta)=\phi(x)+\theta\phi'(x+p)$$

$$\phi(x+\theta)=\phi(x)+\theta\phi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\phi''(x+p)$$

$$\phi(x+\theta)=\phi(x)+\theta\phi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\phi''(x)$$
$$+\frac{\theta^3}{2\cdot3}\phi'''(x+p)$$

$$\phi(x+\theta)=\phi(x)+\theta\phi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\phi''(x)$$
$$+\frac{\theta^3}{2\cdot3}\phi'''(x)+\frac{\theta^4}{2\cdot3\cdot4}\phi''''(x+p) \text{ ecc.}$$

Per la serie che ci dà lo sviluppo di $\phi(x)$,

$$\phi(x)=\phi 0+x\phi'(p)$$

$$\phi(x)=\phi 0+x\phi'0+\frac{x^2}{2}\phi''(p)$$

$$\phi(x)=\phi 0+x\phi'0+\frac{x^2}{2}\phi''0+\frac{x^3}{2\cdot3}\phi'''(p)$$

$$\phi(x) = \phi o + x\phi' o + \frac{x^2}{2}\phi''' o + \frac{x^3}{1 \cdot 3}\phi''' o + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\phi''''(p);$$

ecc. ecc.

Facciamone un esempio.

Cerchisi la serie che esprime lo sviluppo di $\frac{1}{x+a}$, non prendendone che due termini e tenendo conto del resto.

Facciamo $\phi(x+\theta) = \frac{1}{x+a}$, e perciò $a=\theta$, $\phi(x) = \frac{1}{x}$, e quindi $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \phi'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = \phi''(x) = \frac{2}{x^3}$ e $\phi''(x+p) = \frac{2}{(x+p)^3}$: dunque

$\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{(x+p)^3}$ essendo p una quantità contennta fra o ed a.

Per le semplici regole della divisione in fatti si ottiene $\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2(a+x)}$: ora il denominatore $x^2(a+x) = ax^2 + x^3$ può divenire eguale ad $(x+p)^3$ ovvero alla quantità $x^3 + 3x^2p + 3xp^2 + p^3$, prendendo per p una quantità $> o$, e $< a$; poichè $p = o$ ci dà $(x+p)^3 = x^3$, e $p = a$ ci dà $(x+p)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, dal che si vede che il vero denominatore $x^3 + ax^2$ è intermedio alle due quantità x^3, ed $x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3$.

§ 43. Passiamo allo sviluppo delle funzioni a più variabili.

Rappresentando per $\phi(x,y)$ una funzione z delle due variabili x ed y, abbiamo veduto al § (24) che qualunque siano ω e θ, si ha sempre {si scrive ϕ per $\phi(x, y)$}

$$\phi(x+\omega,y+\theta)=\phi(x,y)+\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega+\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}$$
$$+\left(\frac{d\phi}{dy}\right)\theta+\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)\omega\theta+\text{ec.}$$
$$+\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right)\frac{\theta^2}{2}+\text{ec.}$$
$$+\text{ ec.}$$

Col mezzo di questa formola possiamo sviluppare una qualunque funzione $\phi(x+\omega, y+\theta)$ in una serie ordinata colle potenze ed i prodotti delle due quantità ω e θ.

Da essa poi è facile ricavare quest' altra

$$\phi(x,y)=\phi(0,0)+x\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2}+\text{ecc.}$$
$$+y\left(\frac{d\phi}{dy}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)xy+\text{ecc.}$$
$$+\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)\frac{y^2}{2}+\text{ecc.}$$
$$+\text{ ecc.},$$

purchè a differenziazioni eseguite facciasi $x=0$, $y=0$ nei coefficienti $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)$ ecc.

Quest' ultima formola ci dà il mezzo di sviluppare una qualunque funzione di due variabili in serie ordinata colle potenze e coi prodotti delle medesime.

Le due ritrovate serie sono in generale composte di un numero infinito di termini; ma per mezzo di un ragionamento simile a quello del § antecedente possono ridursi ad una forma finita.

Indicando con $\phi'(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$; con $\phi_{,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)$; con $\phi''(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$; con $\phi'_{,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)$; con $\phi_{,,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)$ ecc. ecc., troveremmo secondo il citato ragionamento

$$\phi(x+\omega, y+\theta) = \phi(x, y) + \omega\phi'(x+p, y+q) + \theta\phi_{,}(x+p, y+p)$$

se vogliamo fermarci alle prime potenze degli aumenti ω, θ: ovvero

$$\phi(x+\omega, y+\theta) = \phi(x,y) + \omega\phi'(x,y) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x+p, y+q) + \theta\phi_{,}(x,y) + \omega\theta\phi'_{,}(x+p, y+q) + \frac{\theta^2}{2}\phi_{,,}(x+p, y+q)$$

se vogliamo fermarci alle seconde potenze: ovvero

$$\phi(x+\omega, y+\theta) =$$
$$\phi(x,y) + \omega\phi'(x,y) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x,y) + \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\phi'''(x+p, y+q) + \theta\phi_{,}(x,y) + \omega\theta\phi'_{,}(x,y) + \frac{\omega^2\theta}{2}\phi''_{,}(x+p, y+q) + \frac{\theta^2}{2}\phi_{,,}(x,y) + \frac{\omega\theta^2}{2}\phi'_{,,}(x+p, y+q) + \frac{\theta^3}{2\cdot 3}\phi_{,,,}(x+p, y+q)$$

se vogliamo fermarci alle terze potenze, e così di mano in mano.

La quantità p debb' essere > 0, e $< \omega$; la quantità $q > 0, < \theta$.

$$\phi(x,y) = \phi(0,0) + x\phi'(p,q) + y\phi_{,}(p,q)$$

ovvero

$$\phi(x,y) = \phi(0,0) + x\phi'(0,0) + \frac{x^2}{2}\phi''(p,q) + y\phi_{,}(0,0) + xy\phi'_{,}(p,q) + \frac{y^2}{2}\phi_{,,}(p,q)$$

$$\phi(x,y) = \phi(0,0) + x\phi'(0,0) + \frac{x^2}{2}\phi''(0,0) + \frac{x^3}{2.3}\phi'''(p,q) + y\phi_{,}(0,0) + xy\phi'_{,}(0,0) + \frac{x^2y}{2}\phi''_{,}(p,q) + \frac{y^2}{2}\phi_{,,}(0,0) + \frac{xy^2}{2}\phi'_{,,}(p,q) + \frac{y^3}{2.3}\phi_{,,,}(p,q)$$

e così per gli altri casi.

La quantità p è > 0, $< x$, e la $q > 0$, $< y$.

Dunque *allorquando nello sviluppo di una funzione a seconda delle potenze e de' prodotti di certe quantità* x, y *vogliamo fermarci ai termini di un dato ordine, nei quali, cioè, queste quantità formano delle dimensioni eguali al medesimo ordine, potremo supporre il resto dello sviluppo eguale ai soli termini dell' ordine che ne viene di poi, ponendo in essi* p e q *in vece di quelle quantità* x, y *poste sotto i segni delle funzioni. Ciascuna delle quantità* p e q *è* > 0, *e* $<$ *della quantità ch' essa è destinata a rimpiazzare.*

Crediamo inutile estendere queste teoriche alle funzioni di un maggior numero di variabili, poichè quanto abbiam detto basta per dirigere i nostri lettori in simili ricerche.

§ 44. Data un' equazione $z=0$ tra due variabili x, y, proponiamoci di esprimere una funzione F delle medesime variabili con y senza x.

Prendiamo $x'+x-x'$ in luogo di x, e supponendo che la funzione z si cangi in z', quando x cangiasi in x', avremo pel teorema di Taylor

$$z=0=z'+(x-x')\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\frac{(x-x')^2}{2}\left(\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)$$

$$+\frac{(x-x')^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3z'}{dx'^3}\right)+\frac{(x-x')^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4z'}{dx'^4}\right)+\text{ecc.}$$

Da quest' equazione si cerchi di ricavare il valore di $x-x'$ dato per mezzo di z'. Per questo facciamo

$$x-x'=Az'+Bz'^2+Cz'^3+Dz'^4+Ez'^5+\text{ecc.},$$

e differenziando per x', supponendo, cioè, solo variabile x', avremo l' equazione

$$-1=A\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+z'\left\{\left(\frac{dA}{dx'}\right)+2B\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\}$$

$$+z'^2\left\{\left(\frac{dB}{dx'}\right)+3C\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\}$$

$$+z'^3\left\{\left(\frac{dC}{dx'}\right)+4D\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\}+\text{ecc.},$$

la quale ci dà

$$A\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+1=0;$$

$$2B\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\left(\frac{dA}{dx'}\right)=0;$$

$$3C\left(\frac{dz'}{dx'}\right)+\left(\frac{dB}{dx'}\right)=0,\ \text{ecc.; quindi}$$

$$A=-\frac{1}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)};$$

$$B = -\frac{\left(\frac{dA}{dx'}\right)}{2\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx'}\right);$$

$$C = \frac{A}{2 \cdot 3}\left(\frac{d(AdA)}{dx'^2}\right);$$

$$D = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left\{\frac{d\{Ad(AdA)\}}{dx'^3}\right\};$$

$$E = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left\{\frac{d[Ad\{Ad(AdA)\}]}{dx'^4}\right\}, \text{ ecc.}$$

Determinati così i coefficienti A, B, C, ecc., si avrà $x - x'$ dato per mezzo di una serie che sarà funzione di x' e di y; e se facciamo $x' = f$, essendo f una funzione qualunque di y, avremo $x - x'$ dato per mezzo di una funzione soltanto di y; siccome poi z, z' sono funzioni simili di x e di x', potremo perciò usare z ed x in vece di z' e di x', purchè ad operazioni eseguite si ponga per tutto $x = f$: avremo adunque questa condizione

$$A = -\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)}$$

$$x - x' = zA + z^2 \cdot \frac{A}{2}\left(\frac{dA}{dx}\right) + z^3 \cdot \frac{A}{2 \cdot 3}\left\{\frac{d(AdA)}{dx^2}\right\}$$
$$+ z^4 \cdot \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left\{\frac{d\{Ad(AdA)\}}{dx^3}\right\} + \text{ecc.}$$

Indichiamo ora con $F(x, y)$ ovvero con F semplicemente quella funzione di x e di y che ci proponiamo di sviluppare in una serie che contenga y soltanto, eliminando la x in virtù dell'equazione $z = 0$. In questa funzione sostituiamo all' x la quantità $x' + x - x'$, la quale si è trovato essere $x' + Az' + Bz'^2 + Cz'^3 +$ ecc.; si avrà allora

$$F(x' + Az' + Bz'^2 + Cz'^3 + \text{ecc.}, y) = F(x, y).$$

Rappresentiamo lo sviluppo del primo membro di quest' equazione con
$F(x', y) + bz' + cz'^2 + ez'^3 + fz'^4 +$ ecc., ed avremo
$F(x, y) = F(x', y) + bz' + cz'^2 + ez'^3 + fz'^4 +$ ecc.
Ora quest' equazione essendo vera per qualunque valore dell' x, differenziamola rispetto all' x', e si otterrà

$$0 = \left(\frac{dF}{dx'}\right) + b\left(\frac{dz'}{dx'}\right) + z'\left\{\left(\frac{db}{dx'}\right) + 2c\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\}$$
$$+ z'^2\left\{\left(\frac{dc}{dx'}\right) + 3e\left(\frac{dz'}{dx'}\right)\right\} + \text{ecc.},$$

la quale ci dà

$$b = -\frac{\left(\frac{dF}{dx'}\right)}{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = A\left(\frac{dF}{dx'}\right);$$

$$c = -\frac{\left(\frac{db}{dx'}\right)}{2\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2}\left\{\frac{d\left\{A\left(\frac{dF}{dx'}\right)\right\}}{dx'}\right\};$$

$$e = -\frac{\left(\frac{dc}{dx'}\right)}{3\left(\frac{dz'}{dx'}\right)} = \frac{A}{2\cdot 3}\left\{\frac{d\left\{Ad\left[A\left(\frac{dF}{dx'}\right)\right]\right\}}{dx'^2}\right\}, \text{ ecc.}$$

Avremo adunque

$$F(x, y) = F(x, y) + zA\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{z^2 A}{2}\left\{\frac{d\left\{A\left(\frac{dF}{dx}\right)\right\}}{dx}\right\}$$
$$+ \frac{z^3 A}{2.3}\left\{\frac{d\left\{Ad\left[A\left(\frac{dF}{dx}\right)\right]\right\}}{dx^2}\right\} + \text{ecc.},$$

facendo nel secondo membro $x=f$ a differenziazioni eseguite.

§ 45. Poniamo l'equazione $z=0$ sotto questa forma $x-f-\phi=0$, essendo f quella funzione di y che qui sopra sostituimmo in luogo di x dopo le differenziazioni, e ϕ una funzione qualunque di x e di y: avremo allora

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=1-\left(\frac{d\phi}{dx}\right), \text{ ed } A=-\frac{1}{1-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)}, \text{ ovvero}$$

$$A=-1-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^3 \text{ ecc.};$$

e quindi

$$\frac{A}{2}\left\{\frac{dA\left(\frac{dF}{dx}\right)}{dx}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)+\text{ecc.}$$
$$+\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\text{ecc.}$$

$$\frac{A}{2\cdot 3}\left\{\frac{d\{Ad\left(A\left(\frac{dF}{dx}\right)\right)\}}{dx^2}\right\}=$$

$$-\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)-\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)-\text{ecc.}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)-\text{ecc.}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)-\text{ecc.}$$

$$\frac{A}{2\cdot 3\cdot 4}\left\{\frac{d\left(Ad\left[Ad\left\{A\left(\frac{dF}{dx}\right)\right\}\right]\right)}{dx^2}\right\}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4F}{dx^4}\right)+\text{ecc.}$$

Sostituendo pertanto questi valori in quello di F, ed osservando che $z=-\phi$ quando $x=f$, avremo

$$F=F+\phi\left(\frac{dF}{dx}\right)+\phi\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)+\phi\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$+\frac{\phi^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\qquad+\frac{\phi^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\right)$$
$$+\phi^2\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$$
$$+\frac{\phi^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)$$

la qual formola si riduce alla seguente

$$F=F+\phi\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left\{\frac{d\phi^2\left(\frac{dF}{dx}\right)}{dx}\right\}+\frac{1}{2\cdot 3}\left\{\frac{d^2\phi^3\left(\frac{dF}{dx}\right)}{dx^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\left\{\frac{d^3\phi^4\left(\frac{dF}{dx}\right)}{dx^3}\right\}+\text{ecc.}$$

in cui dobbiamo fare dopo le differenziazioni $x=f$.

Se ϕ ed F sono funzioni solamente di x, e poniamo $f=y$, di modo che l'equazione sia $x=y+\phi x$, avremo

$$Fx=Fy+\phi y\cdot\left(\frac{dF}{dy}\right)+\frac{1}{2}\left\{\frac{d(\phi y)^2\left(\frac{dF}{dy}\right)}{dy}\right\}$$
$$+\frac{1}{2\cdot 3}\left\{\frac{d^2(\phi y)^3\left(\frac{dF}{dy}\right)}{dy^3}\right\}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left\{\frac{d^3(\phi y)^4\left(\frac{dF}{dy}\right)}{dy^3}\right\}+\text{ec.}$$

La qual formola è stata data la prima volta dal celebre La-Grange nelle Memorie dell' Accademia di Berlino del 1768, ed in seguito nella sua Teorica delle Funzioni analitiche, p. 104; e nella nota XI della Risoluzione dell' equazioni numeriche.

§ 46. Negli sviluppi in serie di cui abbiamo parlato superiormente, gli esponenti della variabile secondo la quale progrediva la serie, erano formati dai numeri naturali o, 1, 2, 3, ecc., presi positivamente: ora possono esserci, anzi ci sono realmente alcune funzioni, il cui svolgimento in serie non può di natura sua seguire quella legge; cosa dunque in tal caso ci daranno le formole (E), (F) del num. 39, allorchè le applicheremo a svolgere quelle funzioni?

La risposta a questa questione sarà facile dopo l' esame sopra i principj del calcolo differenziale che ora faremo.

La legge di derivazione (1) che dà origine a questo calcolo è fondata sullo sviluppo di una funzione qualunque $\phi(x+\omega)$ in serie secondo le potenze intiere ascendenti di ω; ed è in conseguenza manifesto che se vi saranno casi nei quali questo sviluppo non potrà aver luogo, in questi casi medesimi non potrà aver luogo il calcolo differenziale; per buona sorte tali casi non sono che particolari, e per conseguenza non turbano la generalità del medesimo calcolo; imperocchè noi dimostreremo che una funzione qualunque $\phi(x+\omega)$, è sviluppabile secondo le potenze intiere ed ascendenti di ω, senza mai contenere nè potenze fratte, nè potenze negative, nè la stessa ω sotto un aspetto trascendente, comunque d' altronde possano trovarsi alcune quantità radicali, alcuni denominatori ed alcune trascendenti in $\phi(x)$, finchè però x rimane indeterminata; e ricevendo la x dei valori particolari, solo per certe determinate forme di $\phi(x)$ un tale sviluppo non può sussistere.

Se X rappresenta un polinomio intiero fatto coll' x, come $a+bx+cx^2+$ ecc., è chiaro che i

termini come X^m (essendo m un numero intiero e positivo) i quali possono essere contenuti in $\varphi(x)$, quando vi si pone $x+\omega$ in vece di x, si potrà svilupparli tutti secondo le potenze intiere di ω, e che questo sviluppo sussisterà ancora per tutt' i valori particolari che potranno darsi all' x. La cognizione del binomio di Newton ci conduce a questo risultamento.

Se si suppone che $\varphi(x)$ contenga alcuni termini, come per esempio: $\sqrt[m]{(X^n)}$, essendo m ed n numeri intieri e positivi; questi termini, quando x vi diviene $x+\omega$, saranno sviluppabili secondo le potenze intiere di ω: in fatti per questa sostituzione X diventerà $X+X'\omega+X''\omega^2+X'''\omega^3+$ ecc., e perciò $\sqrt[m]{(X^n)}$ si cangerà in

$$\sqrt[m]{(X+X'\omega+X''\omega^2+X'''\omega^3+\text{ecc.})^n}=$$

$$\sqrt[m]{(X^n)}+\frac{n}{m}(X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})\cdot\sqrt[m]{(X^{n-m})}$$

$$+\frac{n}{m}\cdot\frac{n-m}{2m}(X'\omega+X''\omega^2-\text{ecc.})^2\cdot\sqrt[m]{(X^{n-2m})}$$

$$+\text{ecc.}$$

Ora si vede che il secondo membro di questa equazione è sviluppabile secondo le potenze intiere e positive di ω: questo sviluppo però è vero finchè x rimane indeterminato, o finchè determinandosi prende tutt' i valori possibili, eccettuati quelli che rendono nulla la quantità sotto il radicale, o che sono radici dell' equazione $X=0$; in quest' ultimo caso non può sussistere un tale sviluppo, poichè facendo $x=a$, e supponendo che questo valore sia uno di quei che rendono nulla la quantità X, i diversi termini dello sviluppo, superiormente ottenuto, essendo moltiplicati per $\sqrt[m]{X^n}$, $\sqrt[m]{X^{n-m}}$, $\sqrt[m]{X^{n-2m}}$,

divengono o nulli o infiniti; effettivamente la cosa debb' essere così, poichè lo sviluppo di $\sqrt[m]{X^n}$, quando x diviene $x+\omega$, ed $x=a$, deve allora di sua natura contenere delle potenze frazionarie di ω, e non può procedere secondo le potenze intiere e positive di esso; in fatti

$\sqrt[m]{(X+X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})^n}$ diviene (perchè $X=0$)

$\sqrt[m]{(X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})^n}=\omega^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{(X'+X''\omega+\text{ecc.})^n}$,

ove si vede che compariscono necessariamente le potenze frazionarie di ω.

Supponiamo che $\phi(x)$ contenga alcuni termini, come X^{-m}; se in questi facciamo $x+\omega$ in vece di x, avremo

$$(X+X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})^{-m}=X^{-m}-mX^{-m-1}(X'\omega$$
$$+X''\omega^2+\text{ecc.})+\frac{m(m+1)}{2}X^{-m-2}(X'\omega+X''\omega^2$$
$$+\text{ecc.})^2+\text{ecc.},$$
ed il secondo membro di questa equazione è sempre sviluppabile secondo le potenze intiere e positive di ω.

Questo sviluppo però, egualmente che il precedente, non è legittimo per quel valore particolare di x che rende X nullo: tutt' i di lui termini allora divengono infiniti.

Ciò succede perchè in questo caso debbono necessariamente aversi nello sviluppo le potenze negative di ω, e non può essere legittimo quello sviluppo che solo contiene le positive.

In fatti quando $x=a$ rende X nullo, si ha

$$(X+X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})^{-m}=(X'\omega+X''\omega^2+X'''\omega^3$$
$$+\text{ecc.})^{-m}=(X'+X''\omega+X'''\omega^2+\text{ec.})^{-m}\cdot\omega^{-m},$$

ove compariscono necessariamente le potenze negative di ω.

§ 47. Supponiamo in fine che $\varphi(x)$ contenga la trascendente logaritmica lX; questa, quando x vi diviene $x+\omega$, si cangia in

$$l(X+X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})=lX$$

$$+l\left(1+\frac{X'\omega}{X}+\frac{X''\omega^2}{X}+\text{ecc.}\right)=lX$$

$$+\frac{X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.}}{X}-\frac{(X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})^2}{2X^2}$$

$$+\text{ ecc.}$$

E si vede chiaramente che i termini come lX, quando x vi diviene $x+\omega$, sono sviluppabili secondo le potenze intiere ed ascendenti di ω: un tale sviluppo però ha luogo per qualunque valore di x, eccettuato quello che rende nulla la quantità X sotto il logaritmo: allora i termini della formola superiore divengono tutti infiniti.

Questo succede perchè appunto lo sviluppo debbe in quel caso contener necessariamente ω sotto la trascendente logaritmica, e per conseguenza non può essere giusta la formola nella quale ω è solo elevato a potenze intiere ed ascendenti.

Che ω, nel caso di X nullo per $x=a$, debba necessariamente nello sviluppo comparire sotto la trascendente logaritmica, si dimostra facilmente: in fatti si ha

$$l(X+X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})=l(X'\omega+X''\omega^2+\text{ecc.})=$$

$$l(X'+X''\omega+\text{ecc.})+l\omega\text{, quando } x=a\text{; e que-}$$

sto sviluppo contiene la trascendente $l\omega$.

Siccome le trascendenti circolari *sen* X, *cos* X si sviluppano in serie ordinate colle potenze intiere e crescenti dell' arco X, così lo sviluppo dei termini ove queste si trovano, ordinato secondo le potenze intiere e crescenti di ω, avrà luogo per tutt' i valori possibili di x, niuno eccettuato.

Se poi $\phi(x)$ contenesse dei termini come X^U, essendo X, U due polinomj intieri in x, siccome questa trascendente X^U si svolge in serie ordinata secondo le potenze di lX, così questo caso combina con quello della trascendente logaritmica, e perciò lo sviluppo di $\phi(x)$, allorchè x diviene $x+\omega$, è vero finchè x rimane indeterminato, o finchè prende tutt' i valori possibili, eccettuati quei che rendono $X=0$ nella trascendente X^U.

Quanto abbiam detto, ci dà questo teorema. *Una funzione qualunque* $\phi(x+\omega)$ *è sempre sviluppabile secondo le potenze intiere e positive di* ω, *nè può contenere mai* ω *con esponenti negativi, nè inviluppato in quantità trascendenti, comunque* $\phi(x)$ *contenga dei trascendenti, finchè* x *rimane indeterminato; ed* x *ricevendo dei valori particolari, lo sviluppo di cui si parla, è vero per tutti i valori dell'* x, *eccettuati quelli*, 1.° *che rendono nullo un radicale, mandando a zero la quantità che è sotto il segno;* 2.° *quelli che rendono nullo il denominatore d' alcuna frazione;* 3.° *quelli che rendono nulla una quantità logaritmica, facendo svanire la quantità che è sotto il segno;* 4.° *finalmente quelli che annullano una funzione di* x *elevata ad una potenza espressa da un' altra funzione di* x, *come per esempio* X^U. *In questi diversi casi particolari debbono comparire nello sviluppo le potenze frazionarie, le negative ed i trascendenti dell' indeterminata* ω.

§ 48. Da quanto abbiamo detto ai §§ antecedenti, risulta che di una funzione qualunque $\phi(x)$ possono aversi i differenziali $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx^2$ ec., finchè x rimane indeterminato, o finchè, non essendo indeterminato, ha dei valori particolari che non annullano denominatori, radicali e quantità trascendenti logaritmiche ed esponenziali.

In questi ultimi casi non essendo vero lo sviluppo in serie ordinata colle potenze intiere e positive di ω della funzione $\phi(x+\omega)$, non può eseguirsi l'operazione di derivazione che dà i differenziali (*). Egualmente la formola del teorema di Taylor

$$(E) \ldots \phi(x+\omega) = \phi(x) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \text{ec.}$$

non potrà essere legittima per quei valori di x pei quali si è dimostrato che non può sussistere lo sviluppo; e l'altra formola che da quella dipende

$$(F) \ldots \phi(x) = \phi(0) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2} + \text{ecc.}$$

non potrà egualmente essere legittima, quando $x=0$ farà svanire in $\phi(x)$ un radicale, o un denominatore, o una quantità trascendente logaritmica, rendendo nulle le quantità sotto il segno radicale e logaritmico.

Ciò premesso, è facile di rispondere alla quistione propostaci al principio del § antecedente, di sapere, cioè, *cosa danno le serie* (E), (F) *del num.* 39 *in quei casi nei quali non ha luogo lo sviluppo ordinato colle potenze intiere e positive di* ω.

I coefficienti dell' ω nella serie (E) sono i differenziali successivi della funzione $\phi(x)$; così se questa funzione contiene dei termini come

$\sqrt[m]{X^n}$, $\frac{1}{X^n}$, $\log X$, X^U, essendo X un polinomio

(*) Non si possono avere i differenziali di quelle funzioni che Eulero chiama inesplicabili, come per esempio $1.2.3.4 \ldots x$, ma ciò è per un altro motivo. In questa sorta di funzioni la variabile x non può ricevere tutti gli aumenti possibili, poichè la di lei variabilità è assoggettata ad una legge stabilita dalla natura della funzione inesplicabile: così nel nostro caso x non può crescere che dell'unità: queste funzioni adunque (§ 1) restano escluse da quelle che si considerano nel calcolo differenziale.

intiero fatto con x, i coefficienti suddetti conterranno i differenziali di quelle espressioni; e perciò il polinomio X in virtù del termine $\sqrt[m]{X^n}$ si troverà in alcuni coefficienti come numeratore, ed in seguito come denominatore; ed in virtù degli altri termini si troverà o sotto il segno logaritmico, o come denominatore: dunque questi coefficienti per quei valori particolari di x che rendono $X = 0$, conterranno le espressioni $\frac{1}{0}$, $l0$; saranno dunque indeterminati e non significheranno cosa alcuna, o nella ordinaria maniera d' esprimersi saranno infiniti.

Ora in questi casi appunto abbiam dimostrato nei §§ antecedenti che lo sviluppo non poteva aver luogo; dunque si concluderà che volendo sviluppare in una serie ordinata per le potenze intiere e positive di ω la funzione $\phi\,(x + \omega)$ nel caso di $x = a$, prendendo la formola

$$\phi\,(x + \omega) = \phi\,(x) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\omega + \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \text{ecc.},$$

faremo $x = a$ nei coefficienti $\phi(x)$, $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ ecc.; e se per questa sostituzione essi conterranno le espressioni $\frac{1}{0}$, $l0$, saremo allora assicurati che in questo caso lo sviluppo non può di natura sua sussistere.

Possono alcuni dei coefficienti incominciare dal divenir nulli, ed in seguito gli altri divenire infiniti; e subito che compariscono le espressioni $\frac{1}{0}$, $l0$, siamo assicurati che lo sviluppo non può esser vero.

Nè dobbiamo temere che vadano a zero tutt' i coefficienti in infinito, poichè allora si avrebbe

$\phi(x+\omega) = 0 + \omega 0 + \frac{\omega^2}{2} 0 + \text{ecc.} = 0$ per qualunque valore di ω, ciò che è assurdo.

Egualmente volendo sviluppare in serie ordinata per le potenze intiere e crescenti di x la funzione $\phi(x)$, prendendo la formola

$$\phi(x) = \phi(0) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2} + \text{ecc.}$$

faremo $x = 0$ in $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ ecc., a differenziazioni eseguite; e se questa sostituzione porterà le espressioni $\frac{1}{0}$, $l0$, saremo assicurati che $\phi(x)$ non può svilupparsi secondo le potenze intiere e positive di x

Così vediamo che possono sempre, per mezzo delle formole superiori, svilupparsi in serie secondo le potenze intiere e crescenti della variabile, quelle funzioni le quali di natura loro sono suscettibili di questo sviluppo; mentre le medesime formole coll'avere o tutt'i termini infiniti, o con averne in principio alcuni eguali a zero, ed il restante infiniti, ci avvisano quali sono i casi nei quali lo stesso sviluppo non può succedere.

§ 49. Per far qualche esempio, si dimandino i differenziali di $xl(1+x)$; secondo le regole della differenziazione avremo, chiamando ϕ quella funzione,

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx = \left(l(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)dx$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)dx^2 = \left(\frac{2}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2}\right)dx^2 \text{ ecc.}$$

Finchè x rimane indeterminato, questi differenziali sono quantità reali e determinate, e sono anche tali per tutt'i valori possibili di x, eccettuati

quelli che rendono $1+x=0$, ovvero $x=-1$: in questo caso i differenziali contengono le espressioni $l0$, $\frac{1}{0}$, dal che siamo accertati che non possono aversi i differenziali della funzione $xl(1+x)$ nel caso di $x=-1$.

Si voglia ora il differenziale di $\phi=2ax-x^2+a\sqrt{(a^2-x^2)}$ nel caso di $x=a$, differenziando questa funzione, abbiamo
$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx=2adx-2xdx-\frac{axdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, e facendovi $x=a$, si trova $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx=-\frac{a^2dx}{0}$; dunque non si può avere il differenziale di questa funzione pel caso di $x=a$.

Quale è lo sviluppo di $\phi=x^2-\frac{1}{lx}$ secondo le potenze intiere e positive di x?

La formola che ci dà generalmente gli sviluppi in serie di una funzione $\phi(x)$ per le potenze della x, è

$$\phi(x)=\phi(0)+\left(\frac{d\phi}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2}+\text{ecc.},$$

facendovi dopo le differenziazioni $x=0$.

Ora nel nostro caso si ha

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=2x+\frac{1}{x(lx)^2}$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)=2-\frac{1}{x^2(lx)^2}-2\frac{1}{x^2(lx)^3}\ \text{ecc.},$$

e facendo $x=0$, si trova

$$\phi(0)=-\frac{1}{l0},\ \left(\frac{d\phi}{dx}\right)=\frac{1}{0\cdot(l0)^2},\ \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$$

$$=2-\frac{1}{0^2\cdot(l0)^2}-\frac{2}{0^2\cdot(l0)^3},\ \text{ecc.}$$

I coefficienti adunque della serie saranno tutti infiniti, e perciò il richiesto sviluppo è impossibile.

CAPO V.

Delle frazioni che si riducono a $\frac{0}{0}$.

§ 50. P e Q essendo funzioni intiere all'x, avviene talune volte che una frazione $\frac{P}{Q}$ prenda la forma di $\frac{0}{0}$, allorchè si dà alla variabile un certo valore, per esempio, si fa $x=a$, mentre da un altro lato essa ha in questo caso un valore determinato. Per esempio: la frazione $\frac{a^2-x^2}{a-x}$ si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, mentre ad essa dando questa forma $\frac{(a+x).(a-x)}{a-x}$, si trova che il di lei vero valore è $a+x$, e pel caso dell' $x=a$, questo valore è $2a$.

Un tale sconcerto avviene semprechè nel numeratore e denominatore si trova uno stesso fattore, che diviene zero quando $x=a$.

Ecco come il calcolo differenziale ci rimedia, somministrandoci la regola per trovare in tali casi il vero valore della frazione.

Poniamo $y=\frac{P}{Q}$, da cui ne viene $yQ=P$. Questa equazione differenziata ci dà

$y\left(\frac{dQ}{dx}\right)+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dP}{dx}\right)$, la quale quando $x=a$,

per cui $Q=0$, ci somministra $y=\frac{\left(\frac{dP}{dx}\right)}{\left(\frac{dQ}{dx}\right)}$, che è il cercato valore della frazione $\frac{P}{Q}$.

Se $x=a$ renderà le frazioni $\left(\frac{dP}{dx}\right):\left(\frac{dQ}{dx}\right)=\frac{0}{0}$, converrà trattare questa come la proposta, e quindi si avrà $y=\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right):\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)$.

In generale sarà $y=\left(\frac{d^nP}{dx^n}\right):\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ essendo n l' ordine di quei differenziali i quali cominciano a non esser nulli pel valore $x=a$.

Nè possono esser sempre nulli i differenziali di P e di Q di qualunque ordine siano (48); così hanno sbagliato i commentatori del calcolo differenziale di Eulero, i quali lo accusanò di non avere egli posto mente a questo caso. La soluzione delle loro difficoltà dipende da ciò che si è detto al § 48 medesimo.

Può in vero accadere che prendendo successivamente i differenziali di P e di Q, uno cessi di esser nullo, mentre l' altro continua ad annullarsi: allora la frazione è essa medesima nulla o infinita. È nulla se il differenziale del denominatore cessa di annullarsi prima del numeratore: è infinita nel caso opposto.

Giovi il fare qualche esempio:

1.° La somma della progressione geometrica $x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots+x^n$ è $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$,

differenziando quest'equazione si ottiene, dopo averla moltiplicata per x,

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n$$

$$= \frac{x - (n+1)\,x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{P}{Q}.$$ Ora volendo il valore della somma di questa serie pel caso di $x = 1$, si trova essa $\frac{0}{0}$; dunque converrà cercarlo con la regola data qui sopra. Si avrà dunque

$$y = \frac{\left(\frac{dP}{dx}\right)}{\left(\frac{dQ}{dx}\right)} = \frac{1 - (n+1)^2 x^n + n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)} = \frac{0}{0}$$

quando $x = 1$;

Differenzieremo pertanto di nuovo, ed avremo

$$y = \frac{\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)} = \frac{-n(n+1)^2 x^{n-1} + n(n+1)\,n+2)x^n}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \text{ quando } x = 1.$$

2.° Sia $y = \frac{P}{Q} = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{ax - a}$, che si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x = 1$. Avremo in questo caso

$$y = \frac{\left(\frac{dP}{dx}\right)}{\left(\frac{dQ}{dx}\right)} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{a} = \frac{0}{a}$$ quando $x = 1$; dunque in questo caso $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{ax - a} = 0$.

3.° Sia $y = \frac{\sqrt{(1-x)}}{\log x}$, che si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x = 1$.

Avremo $y = \frac{-1 : 2\sqrt{(1-x)}}{1 : x} = -\frac{x}{2\sqrt{(1-x)}} = \frac{1}{0}$; dunque in questo caso il valore di y sarà infinito.

§ 51. Ma per comprendere anche meglio come quella regola dataci dal calcolo differenziale debba di natura sua condurci al risultamento bramato, osserviamo che se la funzione $\frac{P}{Q}$ si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x = a$, e bisogna che in sostanza essa sia così composta $\frac{M(fx - fa)^m}{N(Fx - Fa)^n}$.

Facciamo $fx = f(a + x - a)$, e $Fx = F(a + x - a)$, e pel teorema di Taylor avremo

$$\left\{fx - fa\right\}^m = (x-a)^m \left\{\left(\frac{df}{da}\right) + \frac{(x-a)}{2}\left(\frac{d^2f}{da^2}\right) + \text{ecc.}\right\}^m,$$

$$\left\{Fx - Fa\right\}^n = (x-a)^n \left\{\left(\frac{dF}{da}\right) + \frac{(x-a)}{2}\left(\frac{d^2F}{da^2}\right) + \text{ecc.}\right\}^n;$$

quindi pel caso di $x = a$ indicando per M', N' i valori di M, N, in tal caso sarà

$$\frac{P}{Q} = \frac{M'(x-a)^m \left(\frac{df}{da}\right)^m}{N'(x-a)^n \left(\frac{dF}{da}\right)^n}.$$

Concluderemo intanto che il cercato valore sarà una quantità determinata

$\dfrac{M'\left(\dfrac{df}{da}\right)^m}{N'\left(\dfrac{dF}{da}\right)^n}$ se $m=n$, se, cioè, la dimensione del fattore che si annulla nel numeratore, eguaglia quella del fattore che si annulla nel denominatore; che quel valore è nullo o infinito, se quella prima dimensione è maggiore o minore della seconda.

Ora differenziando successivamente il numeratore $P = M(fx - fa)^m$ si trova

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = m(fx-fa)^{m-1} M\left(\frac{df}{dx}\right) + (fx-fa)^m \left(\frac{dM}{dx}\right);$$

$$\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) = m(m-1)(fx-fa)^{m-2} M\left(\frac{df}{dx}\right)^2$$

$$+ (fx-fa)^{m-1} \left\{ mM\left(\frac{d^2f}{dx}\right) + 2m\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dM}{dx}\right) \right\}$$

$$+ (fx-fa)^m \left(\frac{d^2M}{dx^2}\right);$$ ed in generale

$$\left(\frac{d^mP}{dx^m}\right) = m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots . 2 \cdot 1 \cdot M\left(\frac{df}{dx}\right)^m$$

$$+ A(fx-fa) + B(fx-fa)^2 + \ldots + T(fa-fa)^m,$$

essendo A, B, ecc. funzioni cognite.

Nella medesima guisa

$$\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right) = n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots . 2 \cdot 1 \cdot N\left(\frac{dF}{dx}\right)^n$$

$$+ A'(Fx-Fa) + B'(Fx-Fa)^2 + \ldots + T'(Fx-Fa)^n,$$

essendo A', B', ecc. funzioni egualmente conosciute di x.

Con la supposizione $x = a$ si hanno queste due equazioni

$$\left(\frac{d^m P}{dx^m}\right) = m \cdot m - 1 \ldots . 2 \cdot 1 \cdot M' \left(\frac{df}{da}\right)^m ;$$

$$\left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right) = n \cdot n - 1 \ldots . 2 \cdot 1 \cdot N' \left(\frac{dF}{da}\right)^n , \text{ dunque}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{n \cdot n - 1 \ldots . 2 \cdot 1 \cdot (x-a)^m \cdot \left(\frac{d^m P}{dx^m}\right)}{m \cdot m - 1 \ldots 2 \cdot 1 \cdot (x-a)^n \cdot \left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right)} ;$$

e fatto $m = n$, $\frac{P}{Q} = \left(\frac{d^m P}{dx^m}\right) : \left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right)$ purchè si ponga $x = a$ a differenziazioni eseguite.

L' ordine poi di questi differenziali è eguale alla dimensione del fattore comune al denominatore e numeratore che si annulla; ed è facil vedere che quest' ordine è quello appunto ove i differenziali dei termini della frazione cominciano a non si annullare.

§ 52. Se P e Q si annullano perchè $x = a$ fa svanire dei radicali, annullandosi la quantità che è sotto del segno radicale, allora nei differenziali di P e di Q comparirà l' infinito (48), e la frazione prenderà l' aspetto $\frac{\infty}{\infty}$. Allora per ottenere il vero valore della frazione si procurerà, ogni volta che si sono presi due differenziali $\left(\frac{d^n P}{dx^n}\right)$, $\left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right)$, di ridurre la frazione $\left(\frac{d^n P}{dx^n}\right) : \left(\frac{d^n Q}{dx^n}\right)$ ad un' altra il cui

numeratore e denominatore sianq funzioni intiere; giacchè facendovi $x=a$, o questa frazione si ridurrà ad una quantità determinata, o diverrà di nuovo $\frac{0}{0}$, ed in questo caso si ripeterà la solita differenziazione.

Per esempio: sia $y=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, che diviene $\frac{0}{0}$ quando $x=a$. Ora la regola spiegata ci dà

$$y=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{(x-a)}}}{\frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}}=\frac{\infty}{\infty}$$ fatto $x=a$. Per questo riducendo la frazione si ha

$$y=\frac{\{\sqrt{(x-a)}+\sqrt{x}\}\sqrt{(x^2-a^2)}}{2x\sqrt{x}\cdot\sqrt{(x-a)}}=\frac{\{\sqrt{(x-a)}+\sqrt{x}\}\sqrt{(x+a)}}{2x\sqrt{x}},$$

e perciò quando $x=a$, $y=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{2a}}{2a\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

In simili casi però si può anche battere questa altra via. Si sostituisca nella frazione, presa per esempio: $a+\omega$ ad x, ed essa diverrà $\frac{\sqrt{(a+\omega)}-\sqrt{a}+\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}\cdot\sqrt{(2a+\omega)}}$ che si riduce, sviluppando col binomio di Newton,

$$\frac{\sqrt{\omega}+\frac{\omega}{2\sqrt{a}}+\text{ecc.}}{\sqrt{\omega}\left\{\sqrt{2a}+\frac{\omega}{2\sqrt{2a}}+\text{ecc.}\right\}}=\left\{1.+\frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{a}}+\text{ecc.}\right\}.$$

$$\left\{\sqrt{2a}+\frac{\omega}{2\sqrt{2a}}+\text{ecc.}\right\}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{\sqrt{\omega}}{2a\sqrt{2}}+\text{ecc.}$$

Ora il valore cercato sarà quello che ci è dato da questa serie quando $\omega = 0$, dunque egli sarà $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, come trovammo sopra.

§ 53. Data una equazione $z = 0$ fra due variabili x, y, noi abbiamo dimostrato al § (20) come può aversi il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ espresso in x ed y. Rappresentiamolo con $\frac{P}{Q}$, di modo che sia $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{P}{Q}$ essendo P e Q due funzioni delle x, y.

Se nell' equazione $z = 0$ si fa $x = a$, avremo per y un valore determinato, e sia questo $y = b$. Sostituendo i due valori dell' x e dell' y in $\frac{P}{Q}$, s'avrà il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ in questo caso particolare: ora se la sostituzione di $x = a$, $y = b$ in $\frac{P}{Q}$ rendesse questa funzione $= \frac{0}{0}$, come si potrà egli avere il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$?

Io osservo primieramente che risolvendo l'equazione $z = 0$ onde avere il valore di y espresso con x, e sostituendo questo valore in $\frac{P}{Q}$, avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ eguale ad una sola funzione di x che si ridurrà $\frac{0}{0}$ quando $x = a$; questo caso torna a quello del § 42.

Ma potremo anco ritrovare il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

senza bisogno di ricorrere alla risoluzione dell' equazione $z=0$: in fatti l' equazione $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{P}{Q}$ ci dà $Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=P$, che differenziata diviene

$$(a)\ldots\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Q\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right):$$

ora facendo in quest' ultima equazione $x=a, y=b$, avremo $Q=0$, e perciò

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left\{\left(\frac{dQ}{dx}\right)-\left(\frac{dP}{dy}\right)\right\}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

equazione di secondo grado, dalla risoluzione della quale dipenderà il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Se gli stessi valori $x=a$, $y=b$ annulleranno ancora i coefficienti del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, come pure $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, pel che si troverà anche $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{0}{0}$, allora prenderemo il differenziale dell' equazione (a), nel quale facendo $x=a$, $y=b$, avremo per determinare $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ un' equazione del terzo grado di questa forma $N\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+L\left(\frac{dy}{dx}\right)+T=0$, dalla cui risoluzione dipenderà il ricercato valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Si vede come dovremmo fare se $y=b$, $x=a$ annullasse anco i coefficienti di quest' ultima equazione, e così via via.

Per esempio essendo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ay - 2bx}{3y - ax}$, se ne cerchi il valore quando $x = y = 0$. Differenziando $(3y - ax)\left(\frac{dy}{dx}\right) = ay - 2bx$, si ha l' equazione

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3y - ax)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = a\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2b,$$

dalla quale, facendo $x = y = 0$, si ricava

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2b = 0, \text{ e quindi}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 6b)}}{3}.$$

§ 54. Dalla spiegata dottrina dipende quella della scomposizione delle frazioni. Sia $\frac{P}{Q}$ una vera frazione, cioè tale che le dimensioni della x nel denominatore superino quelle nel numeratore. Q potendo avere alcuni fattori reali ed altri immaginarj, cerchiamo di scomporre la frazione $\frac{P}{Q}$ nelle frazioni che si convengono a questi diversi fattori.

Sia primieramente $Q = (a + bx)^m S$. Siano $\frac{A}{(a+bx)^m}$, $\frac{A'}{(a+bx)^{m-1}}$, $\frac{A''}{(a+bx)^{m-2}}$, ecc. le frazioni che competono ai fattori reali $(a+bx)^m$, e sia $\frac{R}{S}$ il restante della frazione.

In questa supposizione abbiamo l' equazione

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a+bx)^m S} = \frac{A}{(a+bx)^m} + \frac{A'}{(a+bx)^{m-1}} + \ldots.$$

$+\frac{A^{(m-1)}}{a+bx}+\frac{R}{S}$. Ora da sì fatta equazione si ricava il valore di R, e si ha

$$R=\frac{P-AS-A'S(a+bx)-\ldots-A^{(m-1)}S(a+bx)^{m-1}}{(a+bx)^m};$$

ma R esser debbe una funzione intiera dell' x, dunque il numeratore $P-AS-$ ecc. dovrà essere esattamente divisibile per $(a+bx)^m$; siccome poi questo fattore non trovasi in S, così anco la quantità $\frac{P}{S}-A-A'(a+bx)-\ldots-A^{(m-1)}(a+bx)^{m-1}$ dovrà potersi dividere per $(a+bx)^m$.

Questa circostanza fa sì che una tal quantità, ed insieme con essa i di lei differenziali sino a quello dell' ordine $m-1$ inclusivamente debbano annullarsi quando in essi si fa $x=-\frac{a}{b}$; avremo pertanto l' equazioni

$$\frac{P}{S}-A=0,\ \left(\frac{d\cdot\frac{P}{S}}{dx}\right)-bA'=0;$$

$\left(\frac{d^2\cdot\frac{P}{S}}{dx^2}\right)-2b^2A''=0$ ecc.; dalle quali si ricavano i cercati valori delle A, A', A'' ecc., e si ha

$$A=\frac{P}{S}\qquad A''=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{d^2\cdot\frac{P}{S}}{dx^2}\right)\text{ ecc.,}$$

$$A'=\frac{1}{b}\left(\frac{d\cdot\frac{P}{S}}{dx}\right)\qquad A'''=\frac{1}{2\cdot3\cdot b^3}\left(\frac{d^3\cdot\frac{P}{S}}{dx^3}\right)\text{ ecc.}$$

§ 55. Poniamo ora $Q = (a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^n S$, e facciamo

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^n S} = \frac{A + A'x}{(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^n}$$
$$+ \frac{B + B'x}{(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^{n-1}} + \ldots + \frac{M + Nx}{a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2}$$
$$+ \frac{R}{S}.$$

Riducendo allo stesso denominatore, e di poi togliendolo dall' equazione, avremo

$$P = (A + A'x)S + (B + B'x)S(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)$$
$$+ (C + C'x)S(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^2 + \ldots\ldots$$
$$+ (M + Nx)(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^{n-1}$$
$$+ R(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^n,$$

dalla quale equazione si ricava

$$R = \frac{P - (A + A'x)S - (B + B'x)S(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2) - \text{ec.}}{(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^n};$$

ma essendo R una funzione intiera, il numeratore del secondo membro dovrà essere esattamente divisibile per $(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)^n$; dunque dovrà egli annullarsi quando $a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2 = 0$, ovvero quando

$x = -\frac{a}{b}\left(\cos\phi \pm \sqrt{(-1)}\cdot \text{sen}\,\phi\right)$; e siccome S non contiene il fattore $(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2)$, così anche l' espressione

$$\frac{P}{S} - (A + A'x) - (B + B'x)(a^2 + 2abx\cos\phi + b^2x^2) - \text{ec.}$$

dovrà essere divisibile esattamente per $(a^2 + 2abx \cos \phi + b^2 x^2)^n$, e perciò essa ed i di lei differenziali fino all'ordine $n-1$ inclusivamente dovranno annullarsi quando si fa $a^2 + 2abx \cos \phi + b^2 x^2 = 0$; dunque in questa supposizione avremo le seguenti equazioni.

$$\frac{P}{S} - A - A'x = 0$$

$$\left(\frac{d \cdot \frac{P}{S}}{dx}\right) - A' - (B + B'x)(2b^2x + 2ab \cos \phi) = 0$$

$$\left(\frac{d^2 \cdot \frac{P}{S}}{dx^2}\right) - B'(2b^2x + 2ab \cos \phi) - 2(B + B'x)b^2 -$$

$$2(C + C'x)(2b^2x + 2ab \cos \phi)^2 = 0 \text{ ecc.},$$

per mezzo delle quali avremo i valori di A, A', B, B', C, C' ecc.

§ 56. Per dare un esempio di sì fatte scomposizioni di frazioni, abbiasi da scomporre la frazione $\frac{m + nx^3}{x(2-x)^2(1+x^2)}$. Il numeratore della frazione competente al fattore x eguaglia $\frac{m + nx^3}{(2-x)^2(1+x^2)}$ quando si faccia $x = 0$; dunque un tal numeratore è $\frac{m}{4}$, e la frazione suddetta è $\frac{m}{4x}$.

I numeratori A, A' delle frazioni $\frac{A}{(2-x)^2}$, $\frac{A'}{2-x}$ che competono al fattore $2-x$, si hanno in questa guisa: A eguaglia $\frac{P}{S}$, e nel nostro caso $\frac{m + nx^3}{x(1+x^2)}$

quando vi si faccia $x = 2$; A' eguaglia $\frac{1}{b}\left(\frac{d\,\frac{P}{S}}{dx}\right)$, e nel nostro caso il differenziale di $\frac{m + nx^3}{x(1 + x^2)}$ diviso per dx e preso negativamente quando vi si faccia $x = 2$. Sono dunque $A = \frac{m + 8n}{10}$, $A' = -\frac{16n - 13m}{100}$, e per conseguenza quelle due frazioni saranno $\frac{m + 8n}{10(2 - x)^2}$, $-\frac{16n - 13m}{100(2 - x)}$.

Rispetto poi alla frazione competente al fattore $1 + x^2$, se noi la rappresentiamo con $\frac{A + A'x}{1 + x^2}$, i valori delle A, A' sono dati da questa equazione $\frac{m + nx^3}{x(2 - x)^2} - A - A'x = 0$, quando in essa si pone $x = -\sqrt{-1}$, ovvero $x = \sqrt{-1}$. In questa guisa si hanno le due equazioni

$$\frac{m - n\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\cdot(2 - \sqrt{-1})^2} - A - A'\sqrt{-1} = 0\ .$$

$$\frac{m + n\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\cdot(2 + \sqrt{-1})^2} - A + A'\sqrt{-1} = 0,$$

dalle quali si ricava $A = -\frac{3n - 4m}{25}$, $A' = -\frac{(3m + 4n)}{25}$, e perciò la cercata frazione sarà

$$-\frac{3n - 4m + (3m + 4n)\,x}{25\,(1 + x^2)}.$$

Avremo pertanto

$$\frac{m+nx^3}{x(2-x)^2(1+x^2)}=\frac{m}{4x}+\frac{m+8n}{10(2-x)^2}-\frac{16n-13m}{100(2-x)}$$
$$-\frac{3n-4m+(3m+4n)x}{25(1+x^2)}.$$

CAPO VI.

Dei massimi e dei minimi.

§ 57. Una quantità diviene *massima* o *minima*, allora quando essa cresce o scema fino ad un certo punto, al di là del quale immediatamente comincia a scemare o crescere. Il calcolo differenziale ci somministra il metodo di ritrovare in quali casi una data funzione diventa massima o minima. Supponiamo che sia rappresentata con $\phi(x)$ quella quantità che noi vogliamo indagare se possa divenire massima o minima, col dare all' x un idoneo valore: sia questo valore $x=a$. Se la funzione proposta debbe divenire massima, è giocoforza che sia $\phi(a)$ maggiore di $\phi(a-\omega)$ e di $\phi(a+\omega)$, prendendo per ω una quantità come si suole piccolissima; e se la funzione debbe divenir minima, dovrà $\phi(a)$ esser minore di $\phi(a-\omega)$ e di $\phi(a+\omega)$: dunque, ritenendo x in vece di a, ma rammentandosi sempre che quest' x è il valore che conviene al *massimo* o al *minimo*, dovrà essere

$$\phi(x) > \begin{matrix}\phi(x+\omega)\\ \phi(x-\omega)\end{matrix} \text{ pel } massimo;$$

$$\phi(x) < \begin{matrix}\phi(x+\omega)\\ \phi(x-\omega)\end{matrix} \text{ pel } minimo.$$

Dunque le quantità $\phi(x+\omega)-\phi(x)$; $\phi(x-\omega)-\phi(x)$ dovranno essere negative nel *massimo*, positive nel *minimo*.

Facciamo lo sviluppo di $\phi(x \pm \omega)$ secondo le formole del § 42, prendendo due soli termini e tenendo conto del resto; sarà

$$\phi(x \pm \omega) = \phi(x) \pm \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x \pm p),$$

essendo $\phi''(x) = \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ e p una quantità contenuta fra o ed ω: dunqne le quantità

$$+\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x+p);$$

$$-\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x-p)$$

dovranno essere nel tempo stesso negative nel *massimo*, positive nel *minimo*, comunque piccolo d' altronde si prenda ω.

Ora date due quantità ωP, $\omega^2 Q$, se instituiscasi la proporzione $\omega P : \omega^2 Q :: P : \omega Q$, si comprenderà facilmente che il conseguente ωQ del secondo rapporto scema continuamente con lo scemare dell' ω, mentre l' antecedente P non si cambia; dunque se la grandezza dell' ω potrà prendersi a piacimento, non vi è alcun dubbio che potremo sempre immaginarcela tale che renda $\omega Q < P$: allora sarà anco $\omega^2 Q < \omega P$, e la quantità $\omega P \pm \omega^2 Q$ sarà positiva o negativa secondo il segno che avrà ωP: tutt' i valori poi dell' ω anche minori di siffatta grandezza avranno la stessa proprietà; dunque potremo sempre prendere ω tanto piccolo che il valore di ciascuna di queste due quantità

$$+\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x+p),$$

$$-\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(x-p)$$

sia positivo o negativo, se tale è il di lei primo termine. Ma di questi due primi termini uno è necessariamente positivo, l'altro necessariamente negativo; dunque finchè quei due primi termini sussisteranno, una di quelle quantità sarà positiva e l'altra negativa: dunque non avrà luogo nè *massimo* nè *minimo* per tutti quei valori dell'x, i quali lasciano sussistere i suddetti due primi termini, poichè allora non possono quelle due quantità essere positive insieme e negative: dunque il *massimo* o il *minimo* potrà solo aver luogo per quei valori dell'x, i quali annullano quei due primi termini: ora questi s'annullano quando $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=0$; dunque l'equazione $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=0$ sarà quella la quale ci darà uno o più valori dell'x che sostituiti in $\phi(x)$ potranno rendere questa funzione *massima* o *minima*.

Cerchiamo adesso il contrassegno o, come suol dirsi, *criterio* per riconoscere quando il valore di x dato da quell'equazione rende la funzione *massima*, e quando la rende *minima*: per questo sviluppiamo $\phi(x\pm\omega)$ in serie prendendo tre termini dello sviluppo e tenendo conto del resto.

Sarà in tal caso

$$\phi(x\pm\omega)=\phi(x)\pm\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\pm\frac{\omega^3}{2}\phi'''(x\pm p);$$

dunque, a cagione di $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=0$, bisognerà che le due quantità

$$+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(x+p),$$

$$+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)-\frac{\omega^3}{2\cdot3}\phi'''(x-p)$$

siano negative pel *massimo*, e positive pel *minimo*.

Ora potrà sempre prendersi ω tanto piccolo che il valore di quelle quantità dipenda dai loro primi termini, in modo che siano negative se i primi termini $\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ sono negativi, e positive se positivi: dunque essendo ω sempre positivo, quel valore di x renderà la funzione $\phi(x)$ un *massimo* se $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ sarà negativo, e la renderà un *minimo* se $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ sarà positivo.

Il *massimo* pertanto ci è dato da queste due equazioni $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) < 0$; ed il *minimo* da queste altre $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) > 0$.

§ 58. Se il valore di x datoci dall' equazione $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = 0$ annullasse ancora $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$, allora prolungheremmo lo sviluppo di $\phi(x \pm \omega)$ ad un termine di più, e così si avrebbe

$$\phi(x \pm \omega) = \phi(x) \pm \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) \pm \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)$$
$$+ \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\phi''''(x \pm p);$$

ora essendo $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = 0$, le due quantità

$$+ \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right) + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\phi''''(x + p);$$
$$- \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right) + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\phi''''(x - p)$$

saranno quelle le quali dovranno essere negative pel *massimo*, positive pel *minimo*. Ma si può prendere ω tanto piccolo che il valore assoluto del primo termine di una di quelle quantità superi quello del secondo, ed allora i valori di quelle due quantità sono positivi se tali sono i lor primi termini, e negativi se egualmente lo sono i detti termini; ora quei due primi termini sono necessariamente di segno contrario; dunque sarà impossibile che siavi il *massimo* o il *minimo*, se quei termini non si annullano, cioè se $\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)$ non è nullo. Affinchè adunque la funzione $\phi(x)$ divenga *massima* o *minima*, bisogna che il valore di x, il quale annullava $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$, annulli anche $\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)$.

In quest' ultimo caso, impiegando ancora il termine seguente nello sviluppo di $\phi(x \pm \omega)$, s' avrebbe

$$\phi(x \pm \omega) = \phi(x) \pm \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) \pm \frac{\omega^3}{1\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)$$
$$+ \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right) \pm \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\phi^{\text{v}}(x \pm p)$$

ed in conseguenza le quantità

$$\frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right) + \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\phi^{\text{v}}(x + p)$$
$$\frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right) - \frac{\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\phi^{\text{v}}(x - p)$$

dovrebbero essere negative pel *massimo*, positive pel *minimo*; dunque la funzione sarà un *massimo* se $\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)$ sarà negativo; e sarà un *minimo* se $\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)$ sarà positivo.

Nella stessa guisa potrebbe dimostrarsi che se il valore di x dato dall' equazione $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=0$ rende ancora nullo $\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)$, allora acciocchè siavi il *massimo* od il *minimo*, conviene che nello stesso tempo si annulli $\left(\frac{d^5\phi}{dx^5}\right)$: vi sarà il *massimo* se $\left(\frac{d^6\phi}{dx^5}\right)$ sarà negativo, e vi sarà il *minimo* nel caso opposto.

In generale, se il valore di x annulla anche $\left(\frac{d^{2n}\phi}{dx^{2n}}\right)$, acciocchè s' incontri il *massimo* od il *minimo*, conviene che s' annulli nello stesso tempo $\left(\frac{d^{2n+1}\phi}{dx^{2n+1}}\right)$; ed il *massimo* vi sarà se $\left(\frac{d^{2n+2}\phi}{dx^{2n+2}}\right)<0$, ed il *minimo* nel caso opposto.

§ 59. Se la funzione $\phi(x)=y$ che deve divenire un *massimo* od un *minimo*, sarà data da una equazione $F(x, y)=0$, ne prenderemo allora l' equazione differenziale $\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dy}\right)=0$, e facendo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, avremo $\left(\frac{dF}{dx}\right)=0$, equazione la quale, combinata con la proposta, ci darà i due valori dell' x e dell' y che corrispondono al *massimo* od al *minimo*.

Prenderemo in seguito il differenziale secondo di $F(x, y)=0$, vi faremo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, e ne ricaveremo il valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ nel quale ponendo i

respettivi valori dell' x e dell' y, se avremo una quantità negativa, la funzione y diverrà *massima*, e se quella quantità sarà positiva, la funzione sarà *minima*.

Può accadere che il valore dell'x, il quale annulla $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, renda infinite le quantità $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^4}\right)$ ec.: abbiamo allora un contrassegno che per quel valore dell' x non può aver luogo lo sviluppo dell' y (§ 47) secondo le potenze intiere e crescenti di ω. In questo caso, supponendo $= a$ quel valore di x, prenderemo lo sviluppo di $\phi(a + \omega)$ secondo le potenze crescenti di ω, siano queste intiere o fratte, e dall' esame di quello rileveremo se $x = a$ rende $\phi(x)$ *massima* o *minima*.

Sarà più utile, in questi casi, prendere, se si può, un' altra funzione Y, la quale abbia il *massimo* o il *minimo*, quando lo ha la y, senza però esser soggetto nello sviluppo all' inconveniente di quella, e cercare il valore di x che rende Y *massima* o *minima*; questo renderà ancor tale nello stesso tempo la y.

Facciamo un esempio:

Si dimanda in quali casi questa funzione $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ diviene un *massimo* o un *minimo*?

Essendo $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$, avremo per determinare x, quest' equazione

$x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$, dalla quale si ricava

$x = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Di più si ha

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 60x^2 - 120x + 30$$

$$\left(\frac{d^4y}{dy^4}\right) = 120x - 120;$$

dunque i due primi valori di x, i quali annullano $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ senza annullare $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, non portano nè *massimo*, nè *minimo*; il terzo valore $x=1$ ci dà un *massimo*, poichè $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-10$; ed in fine il quarto valore $x=3$ ci dà un *minimo*, poichè $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=90$.

§ 60. Veniamo ora a parlare dei *massimi* e dei *minimi* delle funzioni a più variabili.

E primieramente osserviamo, 1.° che la natura delle funzioni debb' esser tale che tutte le variabili, le quali entrano nella di lei composizione, conducano nello stesso tempo al *massimo* o al *minimo*; poichè se alcune di esse conducessero al *massimo*, ed altre al *minimo*, la funzione non potrebbe divenire nè *massima*, nè *minima*; poichè giunta la funzione a quello stato, cioè a quel punto ove trovasi il *massimo* per una variabile, ed il *minimo* per un' altra, se progredisse al di là, crescerebbe sempre in virtù di quelle che portano il *minimo*, e scemerebbe per quelle che portano il *massimo*; 2.° che essendo quelle variabili indipendenti, la funzione che è *massima* o *minima* per dei determinati valori delle variabili, si conserva ancor tale per ciascuno di quei valori in particolare, o considerando una sola variabile, e le altre costanti.

Sia $z=\phi(x, y)$ una funzione delle due variabili x ed y, e si cerchino i valori che convengono alle medesime variabili, affinchè z sia un *massimo* o un *minimo*.

Supponiamo che x divenga $x\pm\omega$, ed y divenga $y\pm\theta$, e sviluppando $\phi(x\pm\omega, y\pm\theta)$ colle formole del § 43, avremo

$$\phi(x\pm\omega, y\pm\theta)=\phi(x, y)\pm\left\{\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\theta\left(\frac{d\phi}{dy}\right)\right\}$$

$+\frac{1}{2}\Big\{\omega^2\varphi''(x\pm p, y\pm q)+2\omega\theta\varphi'_{,}(x\pm p, y\pm q)$

$+\theta^2\varphi_{,,}(x\pm p, y\pm q)\Big\}$, essendo $p>0, <\omega$; $q>0, <\theta$, ed indicando con $\varphi''(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$, con $\varphi'_{,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)$, e con $\varphi_{,,}(x, y)$ la funzione $\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)$.

Se dunque noi rappresentiamo il secondo termine di questo sviluppo per F, ed il terzo per F', avremo

$\varphi(x\pm\omega, y\pm\theta)=\varphi(x, y)\pm F+F'$.

Ragionando ora come abbiamo ragionato per le funzioni ad una sola variabile, si vedrà che $\varphi(x, y)$ sarà un *massimo* quando le quantità $+F+F'$; $-F+F'$ saranno negative, e che sarà un *minimo* quando le medesime quantità saranno positive, comunque piccoli d'altronde possano prendersi ω e θ: vedremo di più che potremo sempre dare ad ω e θ dei valori così piccoli che le quantità $F+F'$; $-F+F'$ siano positive o negative se lo sono i loro primi termini F, $-F$: ora di questi due termini uno essendo sempre necessariamente positivo, e l'altro necessariamente negativo, finchè essi sussisteranno, le due quantità non potranno essere positive insieme e negative insieme, ma sarà una positiva e l'altra negativa: dunque acciò abbia luogo il *massimo* o il *minimo*, bisognerà che quei due primi termini svaniscano: dunque il *massimo* o il *minimo* sarà dato da quei valori di x e di y che rendono $F=0$, ovvero

$\omega\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\theta\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=0$: questa equazione adunque servirà per determinare quei valori quando essi siano

incogniti; e siccome le due variabili x ed y, come pure i loro aumenti sono indipendenti fra loro, così quell' equazione si spezzerà in queste due $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)=0$, dalle quali ricaveremo i valori che rendono quella funzione un *massimo* o un *minimo*.

§ 61. Per conoscere poi se questi valori danno effettivamente un *massimo* o un *minimo*, si prenda lo sviluppo di $\phi(x\pm\omega, y\pm\theta)$ fino alle terze potenze degli aumenti inclusivamente, ed avremo

$$\phi(x\pm\omega, y\pm\theta)=\phi(x,y)\pm\left\{\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\theta\left(\frac{d\phi}{dy}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+2\omega\theta\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)\right.$$
$$\left.+\theta^2\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)\right\}\pm\frac{1}{2\cdot 3}\left\{\omega^3\phi'''(x\pm p, y\pm q)\right.$$
$$+3\omega^2\theta\phi''_{,}(x\pm p, y\pm q)+3\omega\theta^2\phi'_{,,}(x\pm p, y\pm q)$$
$$\left.+\theta^3\phi_{,,,}(x\pm p, y\pm q)\right\},$$ che rappresenteremo per

$$\phi(x\pm\omega, y\pm\theta)=\phi(x,y)\pm F+F'\pm F'';$$

ed essendo $F=0$, sarà

$$\phi(x\pm\omega, y\pm\theta)=\phi(x,y)+F'\pm F'':$$

avremo adunque un *massimo* se le quantità $F'+F''$; $F'-F''$ saranno negative, ed un *minimo* se positive.

Ora i termini che compongono F' essendo di due dimensioni relativamente ad ω e θ, e quei che compongono F'' di tre dimensioni, possiamo sempre prendere ω e θ tanto piccoli che i valori di quelle quantità dipendano, per essere positivi o negativi, dal valore di F'; dunque avremo un *massimo* quando $F'<0$, ed un *minimo* quando $F'>0$.

Essendo $F' = \frac{1}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + 2\omega\theta\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)\right.$ $\left. + \theta^2\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)\right\}$, se rappresentiamo con A, B, C, le funzioni $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)$ allorchè x, y ricevono i valori che corrispondono al *massimo* o al *minimo*, dovrà nel caso del *massimo* la quantità $2F' = \omega^2 A + 2\omega\theta B + \theta^2 C$ essere negativa, e nel caso del *minimo*, positiva: ma essendo

$$\omega^2 A + 2\omega\theta B + \theta^2 C = A\left(\omega + \frac{B\theta}{A}\right)^2 + \theta^2\left(C - \frac{B^2}{A}\right),$$

ed i quadrati $\left(\omega + \frac{B\theta}{A}\right)^2$, θ^2 sempre positivi, la quantità F' sarà positiva, se lo saranno (*) le quantità A, C e $C - \frac{B^2}{A}$, essendo A e C positivi, sarà $AC > B^2$: al contrario la quantità F' sarà negativa quando A, C e $C - \frac{B^2}{A}$ saranno negative, cioè quando $A < 0$; $C < 0$; $C - \frac{B^2}{A} < 0$; ma una quantità negativa, moltiplicata per un'altra negativa, diviene positiva; dunque in quest' ultimo caso $\left(C - \frac{B^2}{A}\right) A$, ovvero $CA - B^2 > 0$, e perciò $CA > B^2$:

(*) I due termini che compongono F', debbono essere insieme positivi, acciò lo sia F; imperocchè se uno fosse positivo e l' altro negativo, potrebbero prendersi ω e θ in maniera che di quei due termini o fosse maggiore il positivo od il negativo, come a noi piace, e così F' diventerebbe positivo o negativo al nostro arbitrio.

Dunque acciò siavi il *massimo* o il *minimo* conviene che sia $CA > B^2$, di più pel *massimo* dobbiamo avere $C < 0$, $A < 0$, e pel *minimo* $C > 0$, $A > 0$. Quando poi manchi alcuna di queste condizioni, non vi sarà nè *massimo* nè *minimo*.

§ 62. Se i valori di x e di y che si trovano pel *massimo* o pel *minimo*, annullano la quantità F', rendendo nulle le quantità A, B, C, allora per vedere se può esservi il *massimo* o il *minimo*, converrà nello sviluppo di $\phi(x \pm \omega, y \pm \theta)$ prendere ancora i due ordini di termini

$$+\frac{1}{2.3}\left\{\omega^3\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)+3\omega^2\theta\left(\frac{d^3\phi}{dx^2dy}\right)+3\omega\theta^2\left(\frac{d^3\phi}{dxdy^2}\right)\right.$$
$$\left.+\theta^3\left(\frac{d^3\phi}{dy^3}\right)\right\}+\frac{1}{2.3.4}\left\{\omega^4\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)+4\omega^3\theta\left(\frac{d^4\phi}{dx^3dy}\right)\right.$$
$$\left.+6\omega^2\theta^2\left(\frac{d^4\phi}{dx^2dy^2}\right)+4\omega\theta^3\left(\frac{d^4\phi}{dxdy^3}\right)+\theta^4\left(\frac{d^4\phi}{dy^4}\right)\right\};$$

e se tutt' i termini moltiplicati per $\pm\frac{1}{2.3}$ saranno ancora fatti nulli da quei valori dell' x e dell' y, potrà esserci allora il *massimo* o il *minimo*: vi sarà il *massimo* quando la quantità $\frac{1}{2.3.4}\left\{\omega^4\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)+\text{ec.}\right\}$ sarà negativa, il *minimo* nel caso opposto.

Indichiamo ora per G, H, L, P, Q le funzioni $\left(\frac{d^4\phi}{dx^4}\right)$, $\left(\frac{d^4\phi}{dx^3dy}\right)$ ecc., quando in vece di quelle variabili x, y si pongono i loro valori, e vediamo le condizioni che rendono la quantità $\omega^4G+4\omega^3\theta H+6\omega^2\theta^2L+4\omega\theta^3P+\theta^4Q$ positiva o negativa.

Ridotta questa quantità sotto la forma

$$C\left(\omega^2+\frac{2H\omega\theta}{G}\right)^2+Q\left(\theta^2+\frac{2P\omega\theta}{Q}\right)^2$$

$$+2\omega^2\theta^2\left(3L-\frac{2H^2}{G}-\frac{2P^2}{Q}\right),$$

si vede che vi sarà il *massimo* quando

$G<0$, $Q<0$, $3L-\dfrac{2H^2}{G}-\dfrac{2P^2}{Q}<0$; ed il *minimo*

nel caso opposto; e così di seguito.

§ 63. Ma per dare la teorica de' *massimi* e dei *minimi* con tutta l' estensione, rappresentiamo con $\phi(x, y, z, u, \text{ecc.})$ una funzione di quante si vogliono variabili, e cerchiamo i valori che queste debbono avere, affinchè la funzione medesima divenga *massima* o *minima*.

Prendendo lo sviluppo di $\phi(x\pm\omega, y\pm\theta, z\pm\pi, u\pm\xi \text{ ecc.})$, secondo le formole del § 43, e supponendo che finisca a quell' ordine di termini che ci abbisogna, acciò stiano a martello i ragionamenti fatti ai §§ antecedenti, avremo

$$\phi(x\pm\omega, y\pm\theta \text{ ecc.})=\phi(x, y, \text{ecc.})\pm$$

$$\left\{\omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\theta\left(\frac{d\phi}{dy}\right)+\pi\left(\frac{d\phi}{dz}\right)+\xi\left(\frac{d\phi}{du}\right)+\text{ec.}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\omega^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+2\omega\theta\left(\frac{d^2\phi}{dxdy}\right)+2\omega\pi\left(\frac{d^2\phi}{dxdz}\right)+\text{ec.}\right.$$

$$+\theta^2\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)+2\theta\pi\left(\frac{d^2\phi}{dydz}\right)+2\theta\xi\left(\frac{d^2\phi}{dydu}\right)+\text{ec.}$$

$$+\pi^2\left(\frac{d^2\phi}{dz^2}\right)+2\pi\xi\left(\frac{d^2\phi}{dzdu}\right)+\text{ecc.}$$

$$\left.+\xi^2\left(\frac{d^2\phi}{du^2}\right)+\text{ecc.}\right\}\pm\text{ecc.}$$

Indicando ora il secondo termine con F, ed il terzo con F', le due quantità $F+F'$, $-F+F'$ debbono essere negative pel *massimo*, e positive pel *minimo*, ciò che potrà accadere se $F=0$; avremo adunque, per determinare le variabili x, y, z, ecc., l'equazioni $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{d\phi}{dz}\right)=0$, ecc., le quali sono tante di numero, quante le variabili stesse; e la funzione sarà *massima* quando $F'<0$, e *minima* nel caso opposto.

$$\text{Facciamo } F'=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\omega^2 A+2\omega\theta A'+2\omega\pi A''+2\omega\xi A'''+\text{ec.}\\ +\theta^2 B+2\theta\pi B'+2\theta\xi B''+\text{ecc.}\\ +\pi^2 C+2\pi\xi C'+\text{ecc.}\\ +\xi^2 D+\text{ecc.}\end{array}\right\}:$$

la quantità posta adunque fra le parentesi dovrà divenire positiva pel *minimo*, o negativa pel *massimo*.

Questa quantità può ricevere le riduzioni seguenti

$$2F'=A\left(\omega+\frac{A'\theta+A''\pi+A'''\xi+\text{ecc.}}{A}\right)^2-\frac{1}{A}(A'\theta+A''\pi+A'''\xi+\text{ecc.})^2+\theta^2 B+2\theta\pi B'+2\theta\xi B''+\text{ecc.}+\pi^2 C+2\pi\xi C'+\text{ecc.}+\xi^2 D+\text{ecc.}$$

$$2F'=A\left(\omega+\frac{A'\theta+A''\pi+A'''\xi+\text{ecc.}}{A}\right)^2+L\theta^2+2L'\theta\pi+2L''\theta\xi+\text{ecc.}+M\pi^2+2M'\pi\xi+\text{ecc.}+N\xi^2+\text{ecc.}$$

essendo L, L' ecc. quantità che si trovano facilmente eseguendo il quadrato di ciò che moltiplica $-\frac{1}{A}$, e riunendo i termini simili:

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + \text{ecc.}}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi + L''\xi + \text{ec.}}{L}\right)^2$$

$$- \frac{1}{L}(L'\pi + L''\xi + \text{ecc.})^2 + M\pi^2 + 2M'\pi\xi + \text{ecc.}$$

$$+ N\xi^2 + \text{ecc.}$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + \text{ecc.}}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi + L''\xi + \text{ecc.}}{L}\right)^2$$

$$+ P\pi^2 + 2P'\pi\xi + \text{ecc.}\ Q\xi^2 + \text{ecc.}$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + \text{ecc.}}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi + \text{ecc.}}{L}\right)^2$$

$$+ P\left(\pi + \frac{P\xi + \text{ecc.}}{P}\right)^2 - \frac{1}{P}(P'\xi + \text{ec.})^2 + Q\xi^2 + \text{ec.}$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + \text{ecc.}}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi + \text{ecc.}}{L}\right)^2$$

$$+ P\left(\pi + \frac{P'\xi + \text{ecc.}}{P}\right)^2 + R\,(\xi + \text{ecc.})^2 + \text{ecc.};$$

sarà dunque F' positiva, ovvero la funzione proposta diverrà un *minimo* se $A > 0$, $L > 0$, $P > 0$, $R > 0$, ecc., ed un *massimo* nel caso opposto.

Alcune delle quantità A, L, P, ecc. potrebbero esser nulle; allora il *massimo* si avrebbe quando tutte le quantità residue sono negative, ed il *minimo* nel caso opposto.

Le quantità A, L, P, R, ecc. sono date per mezzo delle quantità A, B, C, ecc., A', B', C', ecc.

Applichiamo tutta questa teorica alle funzioni di tre variabili.

Sia $\phi = \phi\,(x, y, z)$, ed avremo, per determinare i valori che corrispondono al *massimo* ed al *minimo*, le tre equazioni

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{d\phi}{dy}\right) = 0,\ \left(\frac{d\phi}{dz}\right) = 0.$$

Sarà poi $2F' = A\omega^2 + 2\omega\theta A' + 2\omega\pi A''$
$+ B\theta^2 + 2\theta\pi B'$
$+ C\pi^2$,

e quindi

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 - \frac{1}{A}(A'\theta + A''\pi)^2 + B\theta^2$$
$$+ 2\theta\pi B' + C\pi^2:$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 + \left(B - \frac{A'^2}{A}\right)\theta^2$$
$$+ \left(B' - \frac{A'A''}{A}\right)2\theta\pi + \left(C - \frac{A''^2}{A}\right)\pi^2;$$

e facendo $B - \frac{A'^2}{A} = L$, $B' - \frac{A'A''}{A} = L'$,

$C - \frac{A''^2}{A} = M$, s'avrà

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 + L\theta^2 + 2L'\theta\pi + M\pi^2$$

$$2F' = A\left(\omega + \frac{A'\theta + A''\pi}{A}\right)^2 + L\left(\theta + \frac{L'\pi}{L}\right)^2$$
$$+ \left(M - \frac{L'^2}{L}\right)\pi^2:$$

Dunque vi sarà il *massimo* quando $A < 0$, $L < 0$, $M - \frac{L'^2}{L} < 0$; ed il *minimo* nel caso opposto.

Da quanto abbiamo detto risulta questa conclusione generale: Se in una funzione qualunque delle variabili x, y, z, ecc. porremo in vece di esse le quantità $x + \omega$, $y + \theta$, $z + \pi$, ecc., e svilupperemo la funzione secondo le potenze ed i prodotti di quegli aumenti, i termini ove questi saranno alla prima

dimensione, eguagliati separatamente a zero, daranno le equazioni necessarie onde la proposta divenga un *massimo* o un *minimo*. In seguito considereremo la quantità composta di tutt' i termini ove ω, θ, π formeranno due dimensioni, e bisognerà che questa quantità sia positiva pel *minimo*, negativa pel *massimo*, qualunque d' altronde possano essere i valori di ω, θ, ecc.

Se tutti questi termini svanissero insieme, bisognerebbe ancora per l' esistenza del *massimo* o del *minimo* che tutt' i termini ove ω e θ ecc. formano tre dimensioni, s'annullassero insieme, e che la quantità composta dei termini ove ω e θ ecc. formano quattro dimensioni, fosse sempre positiva pel *minimo*, negativa pel *massimo*, e così di mano in mano.

Sin ora noi abbiam supposto essere le variabili indipendenti tra loro; ma se alcune condizioni del problema stabilissero delle relazioni tra quelle variabili, allora il metodo da eseguirsi si presenta da sè medesimo: conviene eliminare dalla funzione che divenir debbe *massima* o *minima*, tante variabili, quante sono l' equazioni le quali esprimono le suddette relazioni, ed allora le variabili che rimarranno, saranno assolutamente indipendenti tra loro.

§ 64. Illustriamo le spiegate teoriche con un problema. Due linee rette date di posizione nello spazio, vogliasi la loro più corta distanza. Rappresentando con le due equazioni $z = a + bx$, $y = c + ex$ le projezioni della prima di quelle rette, e con le equazioni $z' = A + Bx'$, $y' = C + Ex'$ quelle projezioni della seconda retta, se indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto della prima retta, e con x', y', z' quelle di un punto della seconda, la distanza di questi due punti sarà
$\sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}}$. Ora questa distanza dovendo esser un *minimo*, sarà anche un *minimo* il di lei quadrato. Indichiamo con Δ questo quadrato, e si avrà

$\Delta = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$. Poniamo in vece y, y', z, z' i di loro valori, e sarà

$$\Delta = (x - x')^2 + (c + ex - C - Ex')^2 + (a + bx - A - Bx')^2.$$

Converrà dunque trovare i valori dell' x e dell' x', e questi si avranno dall' equazioni

$$\left(\frac{d\Delta}{dx}\right) = 0, \left(\frac{d\Delta}{dx'}\right) = 0; \text{ cioè da}$$

$$x - x' + e(c + ex - C - Ex') + b(a + bx - A - Bx') = 0,$$

$$x - x' + E(c + ex - C - Ex') + B(a + bx - A - Bx') = 0,$$

dalle quali si ricava (avendo fatto però $a - A = \alpha$; $c - C = \vartheta$)

$$x = \frac{-(b\alpha + e\vartheta)(1 + B^2 + E^2) + (B\alpha + E\vartheta)(1 + Bb + Ee)}{(1 + B^2 + E^2)(1 + b^2 + e^2) - (1 + Bb + Ee)^2},$$

$$x' = \frac{-(b\alpha + e\vartheta)(1 + Bb + Ee) + (B\alpha + E\vartheta)(1 + b^2 + e^2)}{(1 + B^2 + E^2)(1 + b^2 + e^2) - (1 + Bb + Ee)^2}.$$

Esaminiamo i contrassegni o i *criterj* ai quali si riconosce se veramente la quistione ammette un *massimo* o un *minimo*.

Essendo $\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right) = 1 + b^2 + e^2$, $\left(\frac{d^2\Delta}{dx'^2}\right) = 1 + B^2 + E^2$, $\left(\frac{d^2\Delta}{dxdx'}\right) = -1 - bB - eE$, concluderemo che i valori di $\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\Delta}{dx'^2}\right)$ sono positivi, e che quindi la cercata distanza sarà veramente *minima*, se vi sarà anche questa condizione

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\Delta}{dx'^2}\right) > \left(\frac{d^2\Delta}{dxdx'}\right)^2, \text{ cioè}$$

$$(1 + b^2 + e^2)(1 + B^2 + E^2) - (1 + bB + Ee)^2 > 0.$$

Questa condizione è sempre soddisfatta, poichè a quella quantità può darsi la forma $(b-B)^2+(e-E)^2+(bE-eB)^2$, ed allora si riconosce subito che essa è maggiore dello zero.

CAPO VII.

Delle trasformazioni dell' equazioni differenziali.

§ 65. Se tra x ed y si ha un' equazione qualunque $F(x, y)=0$, è noto che possiamo sempre trasformarla in un' altra fra due nuove variabili t ed u, la quale tenga il suo luogo. Supponendo in fatti $x=\phi(u, t)$, $y=\Psi(u, t)$, ovvero $x=\phi$, $y=\Psi$, e rappresentando con ϕ e con Ψ due funzioni di u e t, s' avrà $E(\phi, \Psi)=0$, che sarà una equazione fra le variabili u e t.

Ora può dimandarsi, se data un' equazione differenziale tra due variabili x ed y, potrà egualmente trasformarsi questa in un' altra equazione differenziale tra due nuove variabili u e r, e come ciò potrà conseguirsi.

Per rispondere a questa quistione, premettiamo che quando si ha un' equazione $F(x, y)=0$ tra due variabili x, y, è in nostra libertà considerare la y funzione dell' x, ovvero la x funzione dell' y; ma allorchè dobbiamo prenderne i differenziali, conviene stabilire quale delle due si considera funzione dell' altra, per sapere rispetto a qual variariabile dobbiamo differenziare. Se poi è data una equazione differenziale, allora non è più nulla in nostro arbitrio, e l' equazione differenziale dice da sè medesima quale è la variabile rispetto a cui sono presi i differenziali, ovvero quale delle variabili è considerata funzione dell' altra.

In fatti se essa equazione contiene $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

ecc., allora le differenziali sono prese rispetto all' x, e la y è considerata funzione della x: se essa equazione contiene $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ ecc., le differenziali sono allora prese rispetto all' y, ovvero la x vi è considerata funzione dell' y: non possono però mai sussistere equazioni che nello stesso tempo contengano $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ ecc., poichè la supposizione per ottenere i differenziali dell' y rispetto all' x non è compatibile nello stesso tempo con quella che porterebbe i differenziali dell' x rispetto all' y.

Ciò premesso, sia data un' equazione tra x ed y e $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e vogliasi trasformarla in un' altra tra due variabili u e t, ed il differenziale di una di queste variabili rispetto all' altra. Supponiamo $x = \phi(u, t) = \phi$, $y = \Psi(u, t) = \Psi$, e consideriamo u come funzione di t, di modo che l' equazione trasformata debba essere tra u, t e $\left(\frac{du}{dt}\right)$. Ora essendo u funzione del t, sarà necessariamente x funzione del t, ed y parimente funzione del t, poichè ambedue sono funzioni dell' u e del t, e di più y era funzione dell' x; dunque differenziando, come abbiamo insegnato sopra (§ 8), avremo

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right),$$ e perciò in tale supposizione

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right);$$ ma da un altro lato

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\Psi}{du}\right), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right);$$ dunque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\Psi}{du}\right)}{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d\phi}{du}\right)}.$$

Se adesso nella proposta equazione sostituiamo $\phi(u, t)$ in vece dell' x, $\Psi(u, t)$ in vece dell' y, ed in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ il valore che abbiamo ritrovato, avremo un' equazione trasformata tra u, t e $\left(\frac{du}{dt}\right)$, la quale farà le veci della proposta.

Così quando si avrà l' equazione $\left(\frac{dy}{dx}\right)=F(x,y)$ cominceremo dal trasformarla in quest' altra $\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=F(x, y)$, e quindi in vece delle variabili x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ vi sostituiremo i loro valori dati dall' equazioni $y=\Psi$, $x=\phi$, e dai loro differenziali.

Per farne un esempio, sia data l' equazione $x^2+ay\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, e poniamo $x=u+t$, $y=ut$; avremo allora $\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)+1$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)=u+t\left(\frac{du}{dt}\right)$, e quindi sostituendo nell' equazione $x^2+ay\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=0$ le nuove variabili, s' avrà

$$(u+t)^2+aut\left\{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}:\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}=0,$$

ovvero

$$(u+t)^2+(u+t)^2\left(\frac{du}{dt}\right)+au^2t+aut^2\left(\frac{du}{dt}\right)=0,$$

ovvero

$$(u+t)^2+au^2t+\left\{(u+t)^2+aut^2\right\}\left(\frac{du}{dt}\right)=0;$$

equazione che sta in vece dell' altra tra x ed y.

§ 66. Sia l' equazione da trasformarsi del secondo ordine, contenga cioè ancora $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$: se facciamo $\left(\frac{dy}{dx}\right)=z$, avremo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)$; ora nel caso della trasformazione, cioè allora quando si considera z come funzione dell' x, ed x come funzione del t, si ha

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right),\text{ e perciò }\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right);$$

ma in questo caso

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=z;\text{ dunque}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\left\{\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{dt}\right\},\text{ e quindi}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left\{\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{dt}\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Eseguiscasi la differenziale, e s' avrà

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left\{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

ovvero

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

Sostituiamo ora nella proposta, in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, le ritrovate espressioni; essa conterrà in tal caso le variabili x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, e per ciò ponendovi, in vece di x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ecc., i valori datici da $x=\phi\,(u,\ t)$, $y=\Psi\,(u,\ t)$, e dai differenziali di queste equazioni, s' avrà una equazione trasformata tra u, t, $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$, che terrà il luogo della proposta.

Sia l' equazione da trasformarsi del terzo ordine, contenga cioè ancora $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$: facciamo $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=z$, e sarà $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{dz}{dx}\right)$; ma $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$; dunque $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{dz}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Ora in questo caso si ha

$$z=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left\{\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{dt}\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right);\ \text{dunque}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left\{\frac{d\left\{\frac{d\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}\right\}}{dt}\right\}:\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

ove non altro si deve fare che eseguire le differenziazioni per avere $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ espresso in $\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)$,

$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ ecc.; se si eseguiranno, si avrà

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}-\frac{3\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4}$$

$$+\frac{3\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}-\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4}.$$

Lo stesso metodo c' insegna come trasformare l' equazioni degli ordini superiori.

§ 67. Risulta da ciò che si è detto al § antecedente, che considerando in un' equazione la x e la y quali funzioni di un' altra variabile t, dovremo in essa equazione fare le seguenti sostituzioni

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=A$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{dA}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=B$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\left(\frac{dB}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=C$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=\left(\frac{dC}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=D$$

$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)=\left(\frac{dD}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=E$$

ecc. ecc.

Abbiasi un' equazione differenziale nella quale la y è riguardata come funzione di x, e si voglia trasformarla in un' altra nella quale sia *vice versa* x funzione dell' y; allora supponendo che t, rispetto

a cui si hanno i differenziali nelle formole superiori, divenga la stessa y, si sostituirà y a t in quelle formole, ed osservando di più che la differenziale $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ è in questo caso l' unità, sostituiremo

$1:\left(\frac{dx}{dy}\right)$ a $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e $-\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right):\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$, a $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, e così via via.

In questo modo nell' equazione $P+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, ove y è considerato come funzione dell' x, ed i differenziali sono presi rispetto all' x, si ponga $1:\left(\frac{dx}{dy}\right)$ in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e s' avrà $P\left(\frac{dx}{dy}\right)+Q=0$, equazione trasformata che fa le veci della proposta, ed in essa è considerata la x come funzione dell' y, o la differenziazione vi è fatta rispetto alla variabile y.

L' equazione del secondo ordine
$P+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)+R\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, nella quale y è considerato come funzione di x, si trasforma $\Big\{$ ponendo $1:\left(\frac{dx}{dy}\right)$ per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e $-\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right):\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ per $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\Big\}$ in $P+Q:\left(\frac{dx}{dy}\right)-R\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right):\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$, ovvero

$$P\left(\frac{dx}{dy}\right)^3+Q\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-R\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=0$$

ove i differenziali sono presi rispetto ad y, ovvero x è considerato come funzione di y.

§ 68. Facciamo qualche esempio.

Abbiasi l' equazione $y\left(\frac{dy}{dx}\right)+x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=xy$,
e si voglia trasformare in un' altra nella quale i differenziali siano presi rispetto ad y.

Fatte le opportune sostituzioni, la nostra equazione diverrà $y\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-x\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=xy\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$,
ove è considerato x funzione dell' y.

La stessa equazione $y\left(\frac{dy}{dx}\right)+x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=xy$
vogliasi trasformare in un' altra tra le variabili u, t, e $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$ essendo $y=u+t$, $x=ut$.
S' avrà primieramente

$$y\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}+x\left\{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)\times\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right\}=xy.$$

Ora $\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)+1$; $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$;
$\left(\frac{dx}{dt}\right)=u+t\left(\frac{du}{dt}\right)$; $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2\left(\frac{du}{dt}\right)+t\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$;
dunque sostituendo, avremo

$$(u+t)\,\frac{1+\left(\frac{du}{dt}\right)}{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)}+ut\left\{\frac{\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)}{\left\{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}^2}-\frac{\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}.\left\{2\left(\frac{du}{dt}\right)+t\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\right\}}{\left\{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}^3}\right\}=u^2t+ut^2,$$

ovvero riducendo

$$(u+t)\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}\left\{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}^2$$

$$+ut\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\left\{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}-\left\{1+\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}\times$$

$$\left\{2\left(\frac{du}{dt}\right)+t\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\right\}=(u^2t+ut^2)\left\{u+t\left(\frac{du}{dt}\right)\right\}^3$$

equazione del secondo ordine fra le due nuove variabili u, t ed i loro differenziali.

§ 69. Risguardando y come funzione dell' x, se x aumenta di una quantità indeterminata ω, una equazione $\phi(x, y)=0$ tra x ed y ci dà l' equazione differenziale del primo ordine $P+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$; e se x è la variabile che noi risguardiamo come funzione dell' y, ovvero y è la variabile che aumenta della quantità ω, otteniamo l' equazione differenziale $P\left(\frac{dx}{dy}\right)+Q=0$. Ma se nell' equazione $\phi=0$ non è già la x o la y che aumenti di ω, ma è una data funzione $F(x, y)$ delle variabili x, y la quale aumenta di ω, quale sarà allora l' equazione differenziale?

Facciamo $F(x, y)=t$, ed eliminando x ovvero y, col mezzo delle due equazioni $\phi=0$, $F=t$, s' avrà un' equazione fra y e t, ovvero fra x e t, della quale si potrà prendere la differenziale rispetto a t. Data però l' equazione differenziale

$P+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, come potrà ella trasformarsi in un' altra che abbia i differenziali rispetto a t?

Essendo t una funzione dell' x e dell' y, ed y una funzione di x, saranno per conseguenza le variabili x ed y funzioni del t; dunque l' equazione

$P + Q\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ si trasformerà (§ 65) in

(1) .... $P\left(\frac{dx}{dt}\right) + Q\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$.

Ora eliminando da questa equazione x e $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ col mezzo di $F(x, y) = t$, e della di lei differenziale

(2) .... $\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) = 1$,

avremo un' equazione di questa forma $R + S\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$. Questa sarà la cercata equazione differenziale. Noi avremmo potuto egualmente trovare un' equazione tra x, t, e $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ eliminando y e $\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Nella stessa maniera se fosse data un' equazione differenziale di qualunque ordine tra x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ecc., e si volesse trasformarla in un' altra nella quale i differenziali fossero presi rispetto a t, essendo $t = F(x, y)$, si comincierebbe dal ridurre l' equazione proposta a contenere soltanto x, y, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ecc., quindi s' eliminerebbe x, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ecc., col mezzo dell' equazione $t = F(x, y)$, e dei suoi differenziali rispetto a t,

ed in questa guisa otterremmo una trasformata tra $y, \left(\frac{dy}{dt}\right), \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, ecc.

§ 70. Se poi in vece di essere data tra x, y e t l' equazione $F(x, y) = t$, fosse data un' equazione differenziale del primo ordine

$$\Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right) \right\} = 1,$$

questa terrebbe il luogo dell' equazione (2). Si potrebbe col mezzo di essa eliminare dall' equazione (1) il differenziale $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ma resterebbero sempre le due variabili x ed y, e l' equazione, cui condurrebbe quest' eliminazione, $P' + Q' \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$ conterrebbe x, y, e $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, mentre le variabili x ed y sarebbero considerate quali funzioni di t. Onde eliminare anche x, converrebbe avere l' equazione dalla quale dipende la data $\Psi = 1$.

Se l' equazione da trasformarsi fosse di un ordine maggiore del primo, allora prendendo i differenziali dell' equazione $\Psi = 1$, s' avrebbero l' equazioni necessarie ad eliminare $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ecc., e si troverebbe una trasformata tra x, y, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, ecc.

§ 71. Illustriamo questa teorica col mezzo d' alcuni esempj.

Sia l' equazione $x + y \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, e proponiamoci di trasformarla in un' altra che abbia i differenziali rispetto a t, essendo $xy = t$.

S' avrà primieramente (§ 65)

$x\left(\frac{dx}{dt}\right)+y\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$: ora differenziando $xy=t$, sarà

$x\left(\frac{dy}{dt}\right)+y\left(\frac{dx}{dt}\right)=1$; dunque facendo $x=\frac{t}{y}$;

$\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left\{1-\frac{t}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}:y$, avremo

$\frac{t}{y^2}\left\{1-\frac{t}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}+y\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$, ovvero

$\frac{t}{y^2}+\left(y-\frac{t^2}{y^3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$;

e questa sarà la trasformata che si voleva.

Data la stessa equazione $x+y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, si voglia trasformarla in un'altra con i differenziali rispetto a t, essendo data tra x, y e t quest' equazione $y\left(\frac{dx}{dt}\right)=1$.

Essendo x, y funzione di t, avremo primieramente $x\left(\frac{dx}{dt}\right)+y\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$; vi si farà $\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{1}{y}$, e si troverà la trasformata richiesta $\frac{x}{y}+y\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$. Per eliminare x converrebbe avere l' equazione dalla quale dipende l' equazione $y\left(\frac{dx}{dt}\right)=1$.

Sia ora l' equazione $x+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, e tra x, y, t abbiasi $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1$:

troveremo primieramente

$$x+\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}+y\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}-y\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=0,$$

e quindi ponendovi in vece della quantità $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ la quantità $\sqrt{\left\{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$; ed in vece di $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\sqrt{\left\{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$, si avrà

$$x\left\{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$$
$$+y\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left\{1-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}+y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

e questa equazione contiene i differenziali rispetto a t.

§ 72. Le formole differenziali le quali contengono $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ecc., si possono, come le altre equazioni, trasformare in modo che non vi si trovino se non se i differenziali dell' x e dell' y rispetto ad una nuova variabile t; a tal fine basterà sostituire in esse l' espressioni di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ecc., trovate per tal oggetto al § 65.

Ridotta così una formola a contenere le differenziali $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ecc., $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, ecc., potranno eliminarsi da essa i differenziali rispetto ad una variabile x ovvero y, col mezzo dell' equazione che stabilisce la relazione tra x, y e la nuova variabile, e delle di lei equazioni differenziali.

Quando per istabilire la suddetta relazione è data un' equazione differenziale

$\Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right) \right\} = 1$, ovvero $\Psi = 1$, allora essendo $\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2\Psi}{dt^2}\right) = 0$ ecc., suole anche dirsi che la trasformazione è fatta o deve farsi colla supposizione che $\Psi \left\{ x, y, \left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right) \right\}$ sia una quantità costante, o che abbia i differenziali nulli; così nell' ultimo caso del § antecedente la trasformazione dell' equazione $x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ (equazione in cui dx è supposto costante) dicesi che deve farsi colla supposizione che sia costante $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, ovvero $\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$.

Nel modo stesso se un' equazione nella quale i differenziali sono presi relativamente all' x, vuole trasformarsi in un' altra nella quale i differenziali siano relativi all' y, suole dirsi che *quell' equazione nella quale è costante* dx, *vuole trasformarsi in un' altra nella quale è costante* dy.

In fatti trasformata quell' equazione in $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ ecc., vi faremo $y = t$, ed in conseguenza $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 1$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$ ecc., pel che la trasformata conterrà soltanto $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ ecc.

Trasformiamo la formola $\left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$

in un' altra nella quale i differenziali siano presi rispetto a t, essendo $\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}=1$. Ponendo in questa formola $\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$ in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo $\left(\frac{dy}{dt}\right):\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$, che si riduce a $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, giacchè è $\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}=1$.

Non ci estendiamo di più sopra queste trasformazioni, poichè quanto abbiamo detto ne contiene l' intiera teorica, e ci riserbiamo a darne ulteriore spiegazione allorchè ci verrà il bisogno.

CAPO VIII.

TEORICA GENERALE DEI CONTATTI DELLE CURVE.

Contatti delle curve piane del primo e secondo ordine.

§ 73. Sia ABG una curva data (*Fig.* 1), cui nel punto B condur si debba una tangente FBC; *una retta*, cioè, *che tanto si accosti alla curva, che tra di essa e la curva medesima* BG *non possa condursi un' altra linea retta che passi pel contatto* B.

Siano AD, DB le coordinate ortogonali della curva, e facciasi $AD=x$, $DB=y$: prendasi $DE=\omega$ e conducasi l' altra ordinata EG. I due triangoli simili TDB, BFC (condotta avendo nel punto B la BF parallela all' asse AE) ci danno $TD:y::\omega:FC$,

quindi $FC = \frac{\omega y}{TD}$. Ora se $y = f(x)$ è l' equazione della data curva, si avrà $EG = f(x + \omega)$, e pel teorema di Taylor

$$EG = y + \omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \text{ecc.};$$

e quindi

$$GC = \omega\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y}{TD}\right\} + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.}:$$

se TBC è tangente, come si suppone, dico che debbe necessariamente esser nullo il coefficiente di ω, cioè debb' essere $\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y}{TD} = 0$, e perciò

$TD = y : \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{y\,dx}{dy}$; in fatti avvenga, se può, che $\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y}{TD}$ non sia nullo, ma $= \alpha$, ed allora s'avrà

$GC = \omega\,\alpha + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.}$ Ora conducendo per B una qualunque altra retta $T'BC'$, si ha parimente

$$GC' = \omega\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{y}{T'D}\right\} + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.};$$

e se prendiamo $T'D$ in guisa che si annulli il coefficiente di ω, sarà allora GC' minore di GC, e quella retta BC' passerà allora tra BG e BC, il che è contro l' ipotesi; dunque se BC è la tangente, sarà

$TD = \frac{y\,dx}{dy}$, essendo $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$.

La retta TD chiamasi suttangente.

Nel triangolo rettangolo TDB sarà

$\tang BTD = BD : TD = \left(\frac{dy}{dx}\right)$; e quindi

$$sen\ BTD = \left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}};$$

$$cos\ BTD = \frac{1}{\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}}}.$$

§ 74. Se dal punto di contatto B si conduce BN perpendicolare alla tangente TB, si chiama questa BN *normale* alla curva nel punto B; e la porzione dell' asse DN chiamasi *sunnormale*.

Essendo poi TBN un triangolo rettangolo in B, ed avendosi i valori di TD e DB, si potrà trovare quello della tangente TB; quello della sunnormale DN; quello della normale BN, e quei del seno e coseno dell' angolo BNA fatto dalla normale con l'asse: questi valori saranno

$$TB = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}}\, y : \left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$BN = y\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}};$$

$$DN = y\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ydy}{dx};$$

$$tang\ BNA = 1 : \left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$sen\ BNA = 1 : \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}};$$

$$cos\ BNA = \left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}}.$$

Per esempio: sia $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$ l' equazione dell' ellisse cui si vuol condurre la tangente,

si avrà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{(2ax-x^2)}}$; quindi la suttangente sarà $= y : \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x(2a-x)}{a-x}$.

§ 75. Circolo osculatore (*Fig.* 2) di una curva quello si è *il quale avendo con la curva un punto comune, tanto gli si accosta, che non permette a qualunque altro cerchio di passare tra di esso e la curva, avendo quello stesso punto comune.*

Questo punto comune si chiama *punto d' osculazione*; ed al circolo osculatore si dà anche il nome di circolo di *curvatura*; il raggio di questo circolo chiamasi anch' esso *osculatore* o di *curvatura*.

Data la curva ABC, dimandasi il raggio osculatore in un di lei punto qualunque B.

Siano $AI = x$, $IB = y$ le coordinate ortogonali della curva; sia BT tangente in B, BD normale nello stesso punto; BE l' arco fatto col raggio BD, che suppongo il cercato raggio di curvatura; sia $IK = \omega$, DF parallela all' asse AH, ed F l' intersezione di questa parallela con l' ordinata BI prolungata quanto basti al di sotto dell' asse: facciasi $BF = FI + y = z$. Si unisca CD, e conducasi CG perpendicolare ad FD: si ha

$$BD : BF :: 1 : sen\,BDF = sen\,TBI = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

quindi $BD = z\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$;

$$\frac{FD}{BF} = \frac{BI}{IT} = tang\,BTI = \left(\frac{dy}{dx}\right), \text{ e però}$$

$$FD = z\left(\frac{dy}{dx}\right); \quad DG = z\left(\frac{dy}{dx}\right) - \omega,$$

$$CG = GK + y + \omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

$$= z + \omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.}$$

Ora $\overline{CD}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{CG}^2$, quindi

$$\overline{CD}^2 = \left\{z\left(\frac{dy}{dx}\right) - \omega\right\}^2 + \left\{z + \omega\left(\frac{dy}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.}\right\}^2$$; cui si può dare la forma

$$\overline{CD}^2 = z^2\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} + \left\{1 + z\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\omega^2 + \omega^3 N + \text{ecc.},$$

indicando per $N\omega^3$ la somma di tutt' i termini ove ω trovasi alla terza potenza, ecc.

Estraendo la radice da una banda e l' altra di quest' ultima equazione, avremo per CD una serie di questa forma

$$CD = z\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\left\{1 + z\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\omega^2}{z\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} + \omega^3 M + \text{ecc.}$$

E perciò $CE = CD - DE = CD - DB$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left\{1 + z\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\omega^2}{z\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} + \omega^3 M + \text{ecc.}$$

Dico pertanto che se BD è veramente il raggio di curvatura, come si è supposto, debbe necessariamente il coefficiente di ω^4 annullarsi da sè medesimo, e quindi debbe aversi

$$z = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}, \text{ donde } BD = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)};$$

in fatti se così non fosse, con lo stesso raziocinio che abbiamo fatto per trovare la suttangente, si proverebbe che allora potrebbe trovarsi un altro cerchio il quale rendesse quel coefficiente nullo, e quindi per esso sarebbe minore il valore di CE, vale a dire questo nuovo cerchio si avvicinerebbe più alla curva del supposto cerchio osculatore: egli perciò potrebbe passare tra BC e BE contro l' ipotesi.

Osserviamo che nel valore del raggio osculatore BD trovandosi un radicale secondo, a questo si può dare il segno $\pm$, ed allora anco il valore del raggio sarà dotato del doppio segno. Questa ambiguità di segno non porta alcun pregiudizio, serve anzi ad assegnare la direzione del raggio; ne parleremo al bisogno.

§ 76. Ma esponiamo con maggior generalità la dottrina dei contatti delle curve.

Abbiansi due curve EF, $E'F'$ (*Fig.* 3) riferite ai due assi ortogonali AB, AC. Siano le coordinate della prima ω, π, tra le quali abbiasi l' equazione $\pi = f(\omega)$, indicando con $f\omega$ una data funzione della ascissa ω. Siano p, q le coordinate della seconda, e $q = F(p)$.

Affinchè le due curve abbiano un punto comune, è necessario che ad un' ascissa comune corrisponda nelle due curve una stessa ordinata: Sia $AN = x$ quest' ascissa comune, e sia $NH = y$ l' ordinata che vi corrisponde: dovrà dunque essere $y = f(x)$,

$y = F(x)$, donde $F(x) = f(x)$; e quest' equazione ci darà il valore dell' ascissa che corrisponde al punto comune. Esaminiamo ora il corso di queste curve al di là di questo punto. Nelle due equazioni $\pi = f(\omega)$, $q = F(p)$ poniamo $\omega = x + \theta$, $p = x + \theta$, ed avremo (fatto $NO = \theta$), $OQ = f(x+\theta)$, $OR = F(x+\theta)$, quindi la differenza di queste due ordinate, o la distanza dei due punti R e Q delle curve sarà $RQ = F(x+\theta) - f(x+\theta)$, e sviluppando queste funzioni per mezzo del teorema di Taylor

$$RQ = \left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)\right\}\theta + \left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\right\}\frac{\theta^2}{2} + \text{ec.}$$

E di qui apparisce che questa distanza RQ sarà tanto minore, ed in conseguenza le curve tanto più si avvicineranno tra loro, quanti più termini in questa serie andranno a zero; se dunque oltre essere $F(x) = f(x)$, fosse ancora $\left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$, la differenziale RQ sarebbe minore, e le due curve si avvicinerebbero di più, che se questa condizione non fosse; se anco si avesse $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$, l' avvicinamento crescerebbe di più e così via via.

§ 77. Onde intendere meglio in che consistono questi differenti gradi di avvicinamento, noi considereremo (*Fig.* 3) una terza curva $E''F''$ riferita ai medesimi assi. Siano r ed s le coordinate di questa curva, e sia $s = \phi r$ l' equazione di lei. Supponiamo che anch' essa passi da H; quando dunque $r = x$, sarà $s = y$, e quindi $\phi x = fx = Fx$.

Sia $RQ = D$, $RR'' = \Delta$, ed avremo

$D = F(x+\theta) - f(x+\theta)$, $\Delta = F(x+\theta) - \phi(x+\theta)$:

Ora ogni qual volta D sarà minore di Δ, la terza curva non passerà tra le due prime; e se per qualunque valore di θ, comunque si voglia piccolo o

grande, si manterrà sempre $D < \Delta$, la terza curva $E''F''$ per tutto il suo corso al di là del punto N non potrà mai passare tra le due prime EF, $E'F'$.

Acciocchè poi la terza curva potesse, subito passato il punto comune, continuare il suo corso, almeno per un certo tratto, tra le altre due curve, bisognerebbe che pel valore di θ corrispondente a quel tratto non avesse luogo la mentovata condizione, non fosse cioè $D < \Delta$. Finchè però le funzioni sono tali che sta questa condizione, la terza curva non passerà tra di esse.

Sviluppiamo le funzioni $f(x+\theta)$, $F(x+\theta)$, $\phi(x+\theta)$ in serie col mezzo delle formole del (§ 42); prendendo i due soli primi termini dello sviluppo, facciamo conto del resto, ed avremo

$$f(x+\theta) = fx + \theta\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} f''(x+j)$$

$$F(x+\theta) = Fx + \theta\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} F''(x+j)$$

$$\phi(x+\theta) = \phi x + \theta\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{dx} \phi''(x+j),$$

ove j è una quantità maggiore di zero e minore di θ; questa quantità j potrà essere diversa nei tre sviluppi, ma dovrà essere sempre contenuta tra gli stessi limiti. Sarà dunque

$$D = Fx - fx + \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - f''(x+j)\right\}$$

$$\Delta = Fx - \phi x + \theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j) - \phi''(x+j)\right\}.$$

Ma avendo le tre curve un punto comune corrispondente all' ascissa x, è $Fx = fx = \phi x$, dunque

$$D=\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{df}{dx}\right)\right\}+\frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j)-f''(x+j)\right\}$$

$$\Delta=\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}+\frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j)-\phi''(x+j)\right\}.$$

Supponiamo frattanto che nelle due prime curve abbiasi $\left(\frac{df}{dx}\right)=\left(\frac{dF}{dx}\right)$, ed allora sarà D

$$D=\frac{\theta^2}{2}\left\{F''(x+j)-f''(x+j)\right\}.$$

Ora finchè nell' espressione di Δ resterà il termine moltiplicato da θ, potremo dare a θ un così piccolo valore, che la quantità Δ divenga maggiore della D, astrazione fatta dai segni: in fatti se rappresentiamo con P la quantità che è moltiplicata per θ^2 nell' espressione del D, e con Q la simil quantità nell' espressione del Δ, si avrà $D<\Delta$, quando

$\frac{\theta^2}{2}P<\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}+\frac{\theta^2}{2}Q$, ovvero quando

$\frac{\theta^2}{2}(P-Q)<\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}$, ovvero quando

$\frac{\theta}{2}(P-Q)<\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$: ora il primo termine di quest' ultimo rapporto diminuendo continuamente col diminuire del θ, ne segue che potrà prendersi θ così piccolo, che non solo il primo termine di quest' ultimo rapporto eguagli il secondo, ma ancora che sia minore di lui, pel che anco D sarà minore di Δ, e tutt' i valori del θ minori di questo godranno *a fortiori* della stessa proprietà.

Dunque per questi valori del θ non potrà mai essere la differenza Δ minore della D; non potrà per ciò la terza curva continuare il suo tratto tra le due

prime curve al di là del punto comune, o passare per mezzo ad esse, se la quantità $\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$ non si annulla, ovvero se non è $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$; e se questa ultima equazione è vera, allora non istà più a martello la tirata conclusione.

§ 78. Supponiamo che l' avvicinamento delle due prime curve sia tale che si abbia nel punto comune alle due curve non solo $Fx=fx$, $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\left(\frac{df}{dx}\right)$, ma anco $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$.

Sviluppiamo in serie le ordinate corrispondenti all' ascissa $x+\theta$, e fermiamoci al terzo termine facendo conto del resto: avremo allora

$$F(x+\theta)=Fx+\theta\left(\frac{dF}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)+\frac{\theta^3}{2\cdot3}F'''(x+j)$$

$$f(x+\theta)=fx+\theta\left(\frac{df}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)+\frac{\theta^3}{2.3}f'''(x+j)$$

$$\phi(x+\theta)=\phi x+\theta\left(\frac{d\phi}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\frac{\theta^3}{2\cdot3}\phi'''(x+j),$$

ma $Fx=fx=\phi x$, $\left(\frac{df}{dx}\right)=\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$;

dunque

$$RQ=D=\left\{F'''(x+j)-f'''(x+j)\right\}\frac{\theta^3}{2\cdot3}$$

$$RR'=\Delta=\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}+\frac{\theta^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\right\}$$

$$+\frac{\theta^3}{2\cdot3}\left\{F'''(x+j)-\phi'''(x+j)\right\}.$$

Con un raziocinio simile a quello fatto qui sopra, proveremo che se i termini moltiplicati per le potenze di θ, θ^2 nell' espressione del Δ non sono nulli, potrà prendersi θ così piccolo che la quantità Δ superi D, astraendo dai segni.

Si rappresenti in fatti con P la quantità moltiplicata per $\frac{\theta^3}{2\cdot3}$, la quale è nel valore del D; con Q quella che moltiplica $\frac{\theta^2}{2}$; e con R quella che moltiplica $\frac{\theta^3}{2\cdot3}$ nell' espressione del Δ; avremo

$$D=\frac{\theta^3}{2\cdot3}P$$

$$\Delta=\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}+\frac{\theta^2}{2}Q+\frac{\theta^3}{2\cdot3}R;$$

e sarà dunque $D<\Delta$ se

$$\frac{\theta^3}{2\cdot3}P<\theta\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}+\frac{\theta^2}{2}Q+\frac{\theta^3}{2\cdot3}R, \text{ ovvero se}$$

$$\frac{\theta^2}{2\cdot3}(P-R)-\frac{\theta}{2}Q<\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right):$$

ora il primo termine di questo rapporto diminuisce continuamente col diminuire di θ; dunque esso arriverà non solo ad essere eguale al secondo termine, ma anco ad esserne minore, nel qual caso sarà nel tempo stesso $D<\Delta$.

Chè se poi per la seconda e la terza curva fosse $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, allora avremmo $\Delta=\frac{\theta^2}{2}Q+\frac{\theta^3}{2\cdot3}R$, ed in questo caso anco possiamo prendere θ così piccolo da rendere $D<\Delta$: in fatti sarà $D<\Delta$ quando $\frac{\theta^3}{2\cdot3}P<\frac{\theta^2}{2}Q+\frac{\theta^3}{2\cdot3}R$, ovvero quando $\frac{\theta}{3}(P-R)<Q$;

ciò appunto potrebbe sempre accadere quando Q non fosse nullo da sè medesimo.

Dunque non potrà mai RR'' essere minore di RQ, ovvero la terza curva non potrà mai passare fra le due prime, se non è

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\left(\frac{dF}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right).$$

Proveremo nella stessa maniera che le due curve EF, $E'F'$ nel punto comune se hanno non solo $Fx=fx$, ma anco $\left(\frac{dF}{dx}\right)=\left(\frac{df}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)=\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)$, la terza curva $E''F''$, la quale ha lo stesso punto comune con loro, non potrà (al di là di questo punto) passare tramezzo ad esse, se essa non ha $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)$ $=\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)$; e così di mano in mano.

Dunque se in due curve che hanno un punto comune, i differenziali primi dell' ordinate corrispondenti a questo punto comune sono eguali, nessuna altra curva avente lo stesso punto comune con esse può passare fra di loro quando non abbia ancor essa il differenziale primo della corrispondente ordinata eguale ai differenziali primi dell' ordinate dell' altre. Se poi in quelle due prime curve ancora s' eguagliassero fra loro i differenziali secondi delle ordinate del punto comune, non potrebbe allora alcuna altra curva, dotata dello stesso punto comune, passare tramezzo ad esse, se oltre il differenziale primo, anche il differenziale secondo della di lei ordinata per quel punto comune non agguagliasse differenziali primi e secondi, e così via via.

Queste curve adunque, parlando con rigore geometrico, coincidono soltanto in un punto ove le ordinate sono eguali, e l' eguaglianza dei differenziali primi e secondi di queste ordinate non le rende più o meno coincidenti negli altri punti; ma essa le fa tanto avvicinarsi che nessun' altra curva per la quale non istà quest' eguaglianza, può passare fra esse.

Questa teorica dei contatti, che si debbe all' immortale Lagrange, ci dà la vera idea dei diversi gradi dell' avvicinameuto delle curve. Al primo grado d' avvicinamento, a quello, cioè, che è dato dalla eguaglianza dei differenziali primi, si dà il nome di *contatto del primo ordine*, o semplicemente *contatto*; a quello poi che ci è dato dall' eguaglianza dei differenziali secondi, e che è il secondo grado d' avvicinamento, si dà il nome di *contatto di secondo ordine* o di *osculazione*, ecc.

§ 79. Applichiamo questa dottrina alla ricerca della tangente. Sia $\pi = f(\omega)$ l' equazione della data curva cui si suol condur la tangente; sia $q = a + bp$ l' equazione di una retta che abbia un punto comune con la curva data, e sia tale che la differenziale dell' ordinata al punto comune nella curva eguagli la differenziale dell' ordinata a quel punto della retta. Sia x l' ascissa che corrisponde al punto comune, y l' ordinata.

Avremo dunque $f(x) = a + bx = y$; $\left(\frac{dy}{dx}\right) = b$,

ed in conseguenza $a = y - \left(\frac{dy}{dx}\right)x$; sarà dunque la

equazione di questa retta $q = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)p$;

ora io dico che la retta rappresentata da questa equazione è tangente della data curva nel punto corrispondente all' ascissa x, e ciò perchè tra essa e la curva niun' altra retta vi potrà passare, la

quale abbia lo stesso punto comune: in fatti sia $s = g + hr$ l' equazione di un' altra retta: affinchè essa abbia quello stesso punto comune, e si trovi al di là di esso tra la curva e la retta, bisogna (78) che sia $y = g + hx$, e $\left(\frac{dy}{dx}\right) = h$; ma da queste equazioni si ricavano gli stessi valori del g e dell' h, di quei trovati per a e per b; dunque quest' ultima retta cade sulla prima, e non tra essa e la curva: dunque la retta, la di cui equazione è $q = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)p$, è appunto la tangente della data curva nel punto corrispondente alle coordinate x, y.

§ 80. Se a quel punto comune, che è il punto di contatto tra la retta e la curva, ci figuriamo condotta una perpendicolare alla tangente, ecco come avremo l' equazione di questa perpendicolare. Sia $s = \alpha + \beta r$ la di lei equazione, mentre quella della tangente è $q = a + bp$; dovendo esse aver comune il punto di contatto, sarà $\alpha + \beta x = a + bx$, quindi $\alpha = a + (b - \beta)x$; di più queste due rette dovendo esser perpendicolari tra loro, sarà $\beta b + 1 = 0$, quindi $\beta = -\frac{1}{b}$, e perciò $\alpha = a + \left(b + \frac{1}{b}\right)x$; la cercata equazione sarà pertanto $s = a + \left(b + \frac{1}{b}\right)x - \frac{1}{b}r$, nella quale ponendo in vece dell' a e del b i trovati valori, si ha $s = y + x : \left(\frac{dy}{dx}\right) - r : \left(\frac{dy}{dx}\right)$. Questa perpendicolare è la normale alla curva della quale si è parlato (§ 74). Avute l' equazioni della tangente e della normale, facil cosa sarebbe ritrovare le formole per la suttangente e per la sunnormale, come pure i valori delle tangenti, dei seni e coseni

degli angoli che queste due rette fanno con gli assi.

§ 81. Abbiamo esaminato il contatto che può avere una linea retta con una curva qualunque; esaminiamo ora quello che può avervi il circolo.

Sia EHF una curva (*Fig.* 4) rappresentata da $\pi = f\omega$, essendo π, ω le sue coordinate; e sia il circolo $E'HF'$ che abbia il punto H comune con quella curva. Siano p e q le coordinate AG, GD del circolo; c il raggio; a, b le coordinate AP, PC del suo centro C, e la sua equazione sarà

$$(p-a)^2 + (q-b)^2 = c^2.$$

Da quest' equazione si ricava

$$q = b + \surd\{c^2 - (p-a)^2\}.$$

Rappresentiamo (§ 76) con $q = Fp$ l' equazione della curva da paragonarsi colla curva EF, ed avremo nel nostro caso

$$Fp = b + \surd\{c^2 - (p^2 - a)^2\}, \text{ e quindi}$$

$$Fx = b + \surd\{c^2 - (x-a)^2\}, \left(\frac{dF}{dx}\right) = -\frac{x-a}{\surd\{c^2-(x-a)^2\}}.$$

Se ora supponiamo che nel punto comune H debba essere $Fx = fx = y$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, bisognerà determinare a e b in guisa che siano soddisfatte queste condizioni.

La seconda di quell' equazioni ci dà

$$\surd\{c^2 - (x-a)^2\} = -(x-a) : \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

dalla quale si ricava

$$x - a = c\left(\frac{dy}{dx}\right) : \surd\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}.$$

Dalla prima poi abbiamo

$$y - b = \surd\{c^2 - (x-a)^2\} = -(x-a) : \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= -c : \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}};\ \text{dunque}$$

$$a = x - c\left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}},$$

$$b = y + c : \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}}.$$

Se riguardiamo il raggio c come una quantità determinata, non rimangono più arbitrarie nell'equazione, ed il circolo, il cui centro C è determinato dalle coordinate $AP = a$, $PC = b$, ha non solo un punto H comune con la curva EF, ma di più in questo punto il differenziale primo dell' ordinata del circolo eguaglia il differenziale primo dell' ordinata della curva.

Quest' ultima circostanza fa sì che nessun altro circolo dello stesso raggio può avere quel punto H comune, e nello stesso tempo passare fra il primo circolo e la curva; in fatti supponendo ciò possibile, sia $s = \phi r = h + \sqrt{\{c^2 - (r - g)^2\}}$ l' equazione di quell' altro circolo, il cui centro è determinato dalle coordinate h e g. Dovendo per ipotesi questo nuovo circolo avere lo stesso punto comune H, e passare fra il primo circolo e la curva, bisognerà (§ 76) che non solo sia $\phi x = fx = y$, ma ancora $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$: determinando ora le coordinate h, g in modo di soddisfare a queste condizioni, ricavando, cioè, i valori di g e di h da queste due equazioni

$$h + \sqrt{\{c^2 - (x - g)^2\}} = y,$$

$$\sqrt{\{c^2 - (x - g)^2\}} = -(x - g) : \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

troveremo i medesimi valori del g e dell' h che trovammo dell' a e del b; il nuovo circolo ha il medesimo raggio del primo, ed il centro nello stesso punto; dunque si confonderà o coinciderà con esso.

Dunque chiamando *tangente* del punto H di una curva *quel circolo il quale*, *avendo un determinato raggio* c, *non permette che un altro dotato dello stesso raggio abbia lo stesso punto comune e passi tra esso e la curva*, il circolo, le coordinate del cui centro sono

$$a = x - c\left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$b = y + c : \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$ sarà il circolo *tangente* della curva EF nel punto H.

Questa conclusione è giusta qualunque sia il valore del raggio c: dunque possiamo risguardare c come indeterminato nell' espressioni dell' a e del b, e per ciascun valore che daremo al raggio c, avremo anche diversi valori dell' a e del b, i quali determineranno per ciò diversi punti o i diversi centri C', C'', ecc. dei titoli *tangenziali* $E''HF''$, $E'''HF'''$, ecc.

Queste ordinate a, b apparterranno allora ad una linea, l' equazione della quale risulterà dall' eliminazione del c. Fatta questa eliminazione col mezzo dell' equazioni

$$a = x - c\left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$b = y + c : \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$ avremo l' equazione

$$b = y + (x - a) : \left(\frac{dy}{dx}\right)$$ buona a rappresentare questa linea HCC', la quale è retta, come la di lei equazione ci mostra. In siffatta equazione x è risguardata come costante; a, b sono le coordinate dei diversi punti C, C', C'', ecc.

Questa linea HCC' è il luogo geometrico di tutti i centri dei circoli *tangenziali* della curva nel punto H; è per ciò normale alla curva; ed in fatti la di lei equazione è la stessa che l' equazione della

normale trovata qui sopra (§ 80); avvertendo che ivi abbiamo indicato con r, s quelle coordinate che qui sono rappresentate da a, b.

§ 82. Fra tutti i diversi circoli che soddisfanno alle condizioni $Fx = fx = y$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, se ne può trovare uno il quale soddisfaccia anche alla condizione $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, determinandone opportunamente il raggio c.

A tale effetto avendo ritrovato (§ 81) che

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{-(x-a)}{\sqrt{\{c^2-(x-a)^2\}}}, \text{ sarà } \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = -\frac{c^2}{\{c^2-(x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

e quindi $-\dfrac{c^2}{\{c^2-(x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$: ora

$$\sqrt{\{c^2-(x-a)^2\}} = -(x-a) : \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{c}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}};$$

dunque $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{c}$, e per conseguenza

$c = \left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} : \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$; e questo sarà il valore del raggio del circolo *tangenziale* che soddisfà a quella terza condizione. Sostituendo questo valore del c nei valori dell' a e del b, s' avranno ancora le coordinate del di lui centro, e saranno

$$a = x - \left(\frac{dy}{dy}\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

$$b = y + \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Le tre costanti a, b, c, che trovansi nell' equazione generale del circolo, essendo in questa guisa determinate, possiamo concludere che nessun altro circolo potrà passare tra la curva proposta e quello cui spettano quelle quantità a, b, c; di fatto acciò un' altra curva qualunque, riferita alle coordinate r ed s, e rappresentata dall' equazione $s = \phi r$, potesse passare tra la curva ed il circolo, di cui si tratta, bisognerebbe che fosse

$$\phi x = fx = y, \left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right), \text{ e}$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Ora se questa curva è un circolo, indicando con g, h, k le quantità omologhe alle a, b, c del primo circolo, l' espressioni delle quantità

ϕx, $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)$ conterranno g, h, k in quel modo stesso che Fx, $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ contengono a, b, c; dunque le tre equazioni buone a darci le quantità g, h, k saranno necessariamente le stesse che quelle trovate per a, b, c: dunque troveremo per g, h, k gli stessi valori che trovammo per a, b, c, e per conseguenza il nuovo circolo sarà lo stesso del primo, coincidendo perfettamente sopra di lui.

Questo circolo pertanto avrà, rispetto ai circoli, la medesima proprietà che ha la tangente rispetto alle linee rette. Fra la curva e quella retta tangente non può passare nessun' altra linea retta, ed egualmente fra la curva ed il circolo da noi determinato non può passare nessun altro circolo.

A questo circolo danno i geometri (come si disse) il nome di *circolo osculatore* o di *curvatura*, perchè

s'avvicina alla curva più di qualunque altro circolo, ed in conseguenza ci dà la misura più prossima di lei. Indicando dunque con R il raggio osculatore o di curvatura, si ha

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$ Questa formola non ha il doppio segno come quella del § 75; potrebbe però dargli si per la ragione ivi annunziata; ma non è necessario, giacchè essa formola è solo destinata a darci la grandezza del raggio; per ciò che spetta alla posizione, ci viene somministrata dalle coordinate del centro.

§ 83. Le formole da noi date nei §§ antecedenti suppongono le curve riferite alle coordinate ortogonali x, y: se però saranno esse riferite a due altre qualunque coordinate t, u delle quali si conosca la relazione con x, y, bisognerà allora in quelle formole cangiare i differenziali che erano presi relativamente alla variabile x, in altri presi relativamente alla variabile t.

Così supponendo $y = \Psi(u, t)$, $x = \phi(u, t)$, dovremo (§§ 65 e 66) in vece di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ sostituire

$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$, ovvero

$$\left\{\left(\frac{d\Psi}{dt}\right) + \left(\frac{d\Psi}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)\right\} : \left\{\left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \left(\frac{d\phi}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dt}\right)\right\}$$

ponendo in vece dell' y e dell' x i loro valori; ed in vece di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ dovremo sostituire

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

La formola adunque della suttangente trovata al § 73, cioè $y:\left(\frac{dy}{dx}\right)$ diverrà $y\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right)$; la tangente dell' angolo fatto dalla tangente alla curva con l' asse, la quale tangente era espressa da $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, lo sarà in questo caso da $\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$; il coseno dello stesso angolo sarà $\left(\frac{dx}{dt}\right):\surd\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$, ed il seno $\left(\frac{dy}{dt}\right):\surd\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$; la formola della sunnormale, cioè $y\left(\frac{dy}{dx}\right)$, diverrà $y\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)$; nel modo stesso trasformeremo le formole della tangente e della normale, come pure quelle delle coordinate del centro del circolo osculatore.

L' espressione poi del raggio di curvatura

$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}:\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ si cangerà in

$$R=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2:\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

la quale si riduce a

$$R=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}.$$

In quest' ultima espressione x ed y sono considerate come funzioni del t; poichè per quanto esse si suppongano funzioni di u e di t, la u è una funzione di t data dall' equazione della curva tra u e t.

§ 84. Finora abbiamo considerate le curve con le coordinate rettangole: parliamo adesso delle curve polari.

Sia EF una curva (*Fig.* 5) riferita al polo C; descritto intorno al polo C il circolo ADQ, il cui raggio sia a, e posta in A l' origine dell' ascissa, l' arco AD sia l' ascissa corrispondente al punto H, e CH ne sia l' ordinata. Se facciamo $AD = t$, $CH = u$, la curva EF sarà data in virtù di un' equazione tra u e t che noi rappresenteremo con $u = \phi t$. Ora essendo le nostre formole adattate alle curve a coordinate rettangole, permutiamo le coordinate della curva EF. A tal fine, condotto l' asse TAB, facciamo $AN = x$, $NH = y$, ed avremo

$x = a - u \cos \frac{t}{a}$, $y = u \operatorname{sen} \frac{t}{a}$, donde si ricava

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{u}{a} \operatorname{sen} \frac{t}{a} - \left(\frac{du}{dt}\right) \cos \frac{t}{a},$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{u}{a} \cos \frac{t}{a} + \left(\frac{du}{dt}\right) \operatorname{sen} \frac{t}{a}.$$

I differenziali poi di queste equazioni ci darebbero l' espressioni del $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ e del $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$.

Possiamo adunque risguardare la curva EF come determinata dalle coordinate rettangole x, y, ed adoperare per questa curva le medesime formole adoperate per le altre: solo rammenteremo ciò che abbiamo detto al § antecedente, che, cioè, essendo x, y funzioni delle variabili u, t, dobbiamo in vece del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ mettere $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$, ed in vece del

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ mettere $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$.

La formola della suttangente per le curve a coordinate rettangole è $y : \left(\frac{dy}{dx}\right)$; nel nostro caso adunque la suttangente NT sarà

$$NT = y\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right) = u \operatorname{sen} \frac{t}{a} \left\{ \frac{u}{a} \operatorname{sen} \frac{t}{a} - \left(\frac{du}{dt}\right) \cos \frac{t}{a} \right\} : \left\{ \frac{u}{a} \cos \frac{t}{a} + \left(\frac{du}{dt}\right) \operatorname{sen} \frac{t}{a} \right\}.$$

Nel modo stesso trovar potremmo la formola del raggio osculatore.

Per esempio: FE sia la spirale d' Archimede, della quale l'equazione è $u = \frac{at}{c}$, ove c rappresenta la circonferenza ADQ. Per questa curva abbiamo $\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{a}{c}$; quindi la di lei suttangente sarà

$$NT = \frac{at}{c} \operatorname{sen} \frac{t}{a} \left\{ t \operatorname{sen} \frac{t}{a} - a \cos \frac{t}{a} \right\} : \left\{ t \cos \frac{t}{a} + a \operatorname{sen} \frac{t}{a} \right\}.$$

Conduciamo ora GC perpendicolare sopra HC, e prolunghiamola finchè incontri la tangente nel punto G: ciò fatto, troviamo il valore della linea CG. Essendo $CG : CH :: \operatorname{tang} GHC : 1$, sarà $CG = u \operatorname{tang} GHC$. Ma $\operatorname{tang} GHN = \dfrac{t \operatorname{sen} \frac{t}{a} - a \cos \frac{t}{a}}{t \cos \frac{t}{a} + a \operatorname{sen} \frac{t}{a}}$, e

$tang\,CHN = \frac{\cos\frac{t}{a}}{sen\frac{t}{a}}$, dunque $tang\,GHC = tang\,(CHN + CHN) = \frac{t}{a}$, e per conseguenza $CG = \frac{ut}{a}$.

Se ora col raggio CH descriviamo l' arco HR, avremo $HR : DA :: u : a$, e perciò $HR = \frac{ut}{a} = CG$; di qui viene che prendendo CG per suttangente, essa è sempre eguale all' arco HR. Archimede per mezzo della sola geometria giunse a trovare la medesima proprietà.

CAPO IX.

Considerazioni sulla teorica dei contatti delle curve piane.

§ 85. Affinchè una curva di una data famiglia, ma indeterminata nella posizione e nella grandezza, abbia un contatto di un ordine *ennesimo* con un' altra curva di una famiglia parimente data, ma ancor data di posizione e di grandezza, e lo abbia in un determinato punto di quest' ultima curva, fa di bisogno (§ 78) che, sostituita nell' equazione della prima curva alla lettera che rappresenta la di lei ascissa, la lettera che rappresenta l' ascissa di quel punto determinato, fa di bisogno, dico, che l' ordinata la quale allora ci è data dall' equazione della prima curva, eguagli l' ordinata della seconda curva in quel punto determinato; e che di più i differenziali di queste due ordinate fino all' ordine *ennesimo* inclusivamente si eguaglino rispettivamente tra loro.

Per meglio spiegarmi chiamerò la prima di queste curve *toccante*, e la seconda *toccata*.

Sia l'equazione della toccante $q = \phi(p, a, b, c, \text{ec.})$ nella quale p è l' ascissa, q l'ordinata, ed a, b, c, ecc. sono i parametri indeterminati, cui si dà anche il nome di *elementi del contatto*. Sia $y = F(x)$ l' equazione della toccata. Se vorremo che la toccante abbia un contatto di primo ordine con la toccata nel punto corrispondente all' ascissa x, determineremo a e b in guisa che siano soddisfatte queste equazioni $\phi(x) = F(x)$, $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$; onde abbia un contatto del secondo ordine, determineremo inoltre c in guisa che sia soddisfatta quest' altra equazione $\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$; e così via via.

La toccante adunque sarà suscettibile di un maggiore o minor grado di avvicinamento con la toccata, a misura che sarà maggiore o minore il numero dei di lei parametri indeterminati. Se essa avrà, per esempio, quattro parametri, sarà suscettibile di un contatto del terzo ordine, e se essa ne avrà un numero n, potrà allora toccare l'altra curva con un contatto dell' ordine $n - 1$.

§ 86. Poniamo che la toccante esser debba una parabola, la cui equazione sia $q = a + bp + cp^2$. Sarà questa suscettibile di avere con la toccante un contatto del secondo ordine, e lo avrà veramente in quel punto della toccata che corrisponde alle coordinate x, y, se faremo

$$a = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

$$b = \left(\frac{dy}{dx}\right) - x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right):$$

l' equazione allora di questa parabola osculatrice sarà

$$q = y + (p - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(p-x)^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Generalmente parlando, una parabola la cui equazione sia $q = a + bp + cp^2 + \ldots\ldots + mp^n$, avrà un contatto dell' ordine *ennesimo*, se i suoi parametri a, b, ecc. m, i quali sono $n+1$ di numero, essendo indeterminati, li determineremo in guisa che siano soddisfatte le $n+1$ equazioni di quel contatto. Così facendo, l' equazione della parabola la quale godrà di questo pregio, sarà

$$q = y + (p - x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{(p-x)^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(p-x)^n}{2\cdot 3 \ldots . n}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right).$$

Avverto di nuovo che le coordinate di questa parabola sono indicate da p e q. Le lettere x, y indicano le coordinate del punto del contatto comuni alla toccante ed alla toccata.

§ 87. Prendiamo a considerare l' equazione generale delle sezioni coniche, la quale è

$$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0;$$

quando in quest' equazione $b = \frac{a^2}{4}$, allora essa appartiene, come si sa, alla parabola ordinaria; quando $b > \frac{a^2}{4}$ appartiene all' elisse, e quando $b < \frac{a^2}{4}$ all' iperbola. Dunque l' equazione della parabola non può contenere più di quattro parametri indeterminati, cioè quattro elementi del contatto; e l'elisse e l' iperbola contener ne possono cinque: dunque data una curva che debba esser toccata in un certo

dato punto, si potrà trovare una parabola che la tocchi con un contatto o del primo o del secondo o del terz' ordine; potremo poi trovare una elisse o una iperbola che tocchi la data curva con un contatto anche del quart' ordine.

Che veramente una parabola ordinaria non possa contenere più che quattro elementi del contatto, si rileverà quando si rifletta che può esser indeterminato il suo parametro propriamente detto, la situazione del suo vertice e la direzione del suo asse. Rispetto poi all' elisse o all' iperbola, possono essere indeterminati i due assi, la posizione del suo centro e la direzione di uno di questi assi.

E per non tornare più sopra queste cose, io qui voglio che si osservi come la sola linea retta ha due parametri; tre ne ha il cerchio; e tutte le altre curve non possono averne meno di quattro, dei quali tre non ispettano alla grandezza della curva, ma alla sua situazione nel piano delle coordinate. Questi ultimi tre non sono veramente necessarj all' equazione delle curve, e possono mandarsi via con un' idonea permutazione delle coordinate.

§ 88. Nè faccia specie che l'equazione della curva toccante non abbia la forma $q = \phi(p, a, b, \text{ecc.})$, ma abbia piuttosto quest'altra $\phi(p, q, a, b, \text{ecc.}) = 0$, imperciocchè per trovare i valori dei parametri a, b, ecc. basterà prendere i differenziali di questa ultima equazione, e sostituire nell' equazioni differenziali che ne risultano, l' x alla p, l'y alla q; la $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ alla $\left(\frac{dq}{dp}\right)$, e generalmente parlando la $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ alla $\left(\frac{d^nq}{dp^n}\right)$; così facendo, si avranno l'equazioni necessarie al ritrovamento di quei valori. Dei cinque parametri di una elisse non ne lasciando indeterminati che due soli, per esempio i due assi, e disponendo degli altri tre in guisa che questa elisse

abbia il suo asse sopra l'asse medesimo delle ascisse, ed il suo vertice nell'origine delle coordinate, proponiamoci di trovare i valori di quei due assi, idonei a far sì che questa curva abbia un contatto di primo ordine con una data curva toccata. L'equazione della elisse in questo caso speciale è $a^2q^2 = b^2(2ap - p^2)$, ove p e q rappresentano le coordinate; ed a e b i semiassi. Differenziamo quest' equazione, ed avremo

$$a^2q\left(\frac{dq}{dp}\right) = b^2(a-p).$$

In quell' equazione della toccante ed in questa che ne è il differenziale facciamo le sostituzioni qui sopra prescritte, ed avremo queste altre due equazioni

$$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2),$$

$$a^2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = b^2(a-x),$$

dalle quali ricavar si debbono i valori di quei semiassi a, b. Questi valori sono

$$a = \frac{x\left\{y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}{y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)};$$

$$b = \left\{y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}\sqrt{\frac{y}{y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)}}.$$

L'equazione poi della cercata elisse sarà

$$q^2 = \frac{\left\{y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}y}{x^2}\left\{\frac{2x\left\{y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}{y - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)}p - p^2\right\},$$

ove p, q sono le di lei coordinate, mentre x, y sono le coordinate del punto di contatto.

§ 89. Essendo la toccante una parabola rappresentata dall' equazione $q = a + bp + cp^2$, noi abbiamo (§ 86) trovati i valori degli elementi del contatto a, b, c onde la parabola avesse un contatto di secondo ordine con una curva toccata qualunque: ora sia l' equazione di questa toccata $y = \alpha + \beta x$, sia, cioè, la toccata una linea retta, ed i valori di quegli elementi saranno $a = \alpha + \beta x - \beta x = \alpha$, $b = \beta$, $c = 0$, cioè la toccante dovrà essere una stessa linea retta che cada sulla toccata. Se gli elementi del contatto del circolo osculatore si accomodassero al caso che la curva toccata fosse una retta data da quella equazione $y = \alpha + \beta x$, si troverebbe che questo circolo aver debbe un raggio infinito a causa dell' essere $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$; così niuno inconveniente risulta dal ritrovarsi nulli al di là di un certo ordine i differenziali della curva toccata.

§ 90. Riprendiamo l' equazione della parabola $q = a + bp + cp^2$, ed i valori dei di lei elementi del contatto. Supponiamo che la curva toccata sia la logaritmica, l' equazione della quale è $y = \alpha^x$, ove α rappresenta il di lei determinato parametro. Ciò posto, avremo $a = \alpha^x - x\alpha^x \log\alpha + \frac{x^2}{2} \alpha^x \overline{\log\alpha}^2$,

$b = \alpha^x \log\alpha - x\alpha^x \overline{\log\alpha}^2$, $c = \frac{1}{2} \alpha^x \overline{\log\alpha}^2$;

e l' equazione della parabola, la quale ha un contatto di secondo ordine con la data logaritmica, sarà

$$q = \alpha^x \left\{ 1 - x\log\alpha + \frac{x^2}{2} \overline{\log\alpha}^2 \right\}$$

$$+ \alpha^x \log\alpha \cdot \{ 1 - x\log\alpha \} p + \frac{1}{2} \alpha^x \overline{\log\alpha}^2 \cdot p^2.$$

E qui pongo attenzione alle relazioni che vi sono tra

quegli elementi del contatto, in virtù delle quali si ha

$$a^x = \frac{a}{1 - x \log a + \frac{x^2}{2} \overline{\log. a}^2},$$

$$b = \frac{a \log a \cdot (1 - x \log a)}{1 - x \log a + \frac{x^2}{2} \overline{\log a}^2},$$

$$c = \frac{a \overline{\log a}^2}{2 \left\{ 1 - x \log a + \frac{x^2}{2} \overline{\log a}^2 \right\}}.$$

Ora se l'equazione della parabola toccante fosse stata

$$q = a + \frac{a \log \beta \, (1 - m \log \beta)}{1 - m \log \beta + \frac{m^2}{2} \overline{\log \beta}^2} p$$

$$+ \frac{a \overline{\log \beta}^2}{2 \left\{ 1 - m \log \beta + \frac{m^2}{2} \overline{\log \beta}^2 \right\}} p^2,$$

nella quale i due parametri m, β avessero avuto due valori determinati, e fosse restato soltanto da determinarsi il parametro a, allora, in virtù della determinazione di questo parametro, quella parabola non avrebbe potuto avere altro che un semplice punto d'intersecazione con la logaritmica; ed in questo caso dovrebbesi prendere

$$a = 2a^x \left\{ 1 - m \log \beta + \frac{m^2}{2} \overline{\log \beta}^2 \right\} : \left\{ 2 - 2(m - x) \log \beta \right.$$
$$\left. + (m - x)^2 \overline{\log \beta}^2 \right\}.$$

Il punto d'intersecazione di queste due curve sarebbe quello che corrisponde all'ascissa x della logaritmica. Quest'ascissa x può esser qualunque; così in qualunque punto della logaritmica possiamo far

sì che la nostra parabola sia secante. Supponiamo che il valore determinato del parametro β sia lo stesso parametro a della logaritmica; allora l' equazione della nostra parabola sarà

$$q = a + \frac{a \log a\,(1 - m \log a)}{1 - m \log a + \frac{m^2}{2}\,\overline{\log a}^2}\,p$$

$$+ \frac{a\,\overline{\log a}^2}{2\left(1 - m \log a + \frac{m^2}{2}\,\overline{\log a}^2\right)}\,p^2,$$

e fatto il parametro

$$a = \frac{2a^x\left(1 - m \log a + \frac{m^2}{2}\,\overline{\log a}^2\right)}{2 - 2(m - x)\log a + (m - x)^2\,\overline{\log a}^2},$$

la parabola segherà la logaritmica in qualunque di lei punto corrispondente all' ascissa x.

Quando poi tra tutt' i punti della logaritmica si volesse far passar la parabola da quello, la cui ascissa è $= m$, allora il valore di a sarebbe

$$a = a^m\left(1 - m \log a + \frac{m^2}{2}\,\overline{\log a}^2\right),$$

ed in questo punto speciale la parabola avrebbe un contatto del secondo ordine, mentre in tutti gli altri ella non può esser che secante.

§ 91. Poniamo ora che la curva trovata sia la parabola, la cui equazione è $y = a + bx + cx^2$, ove a, b, c sono i di lei parametri i quali hanno valori determinati, e che la toccante esser debba la logaritmica che ha per equazione $q = a^p$, essendo a l' elemento del contatto ch' essa contiene. Diremo subito (§ 85) che questa logaritmica non può avere altro che un

punto d'intersecazione con quella parabola, e se prenderemo $a = (a + bx + cx^2)^{\frac{1}{x}}$ l'equazione della logaritmica diverrà $q = (a + bx + cx^2)^{\frac{p}{x}}$, e questa segherà la parabola in un qualunque di lei punto corrispondente all' ascissa x. Rammentiamo poi che tanto la curva toccante quanto la toccata si risguardano sempre come riferite ai medesimi assi ortogonali; di modo che l' asse delle ascisse x della toccata è lo stesso che l'asse delle ascisse p della toccante: la medesima cosa si dica dell' asse delle ordinate.

§ 92. Quando due curve hanno un punto comune tra loro, quel grado di contatto che la toccante ha con la curva toccata, l' ha *vice versa* questa con quella; così la parabola in virtù di un' idonea determinazione dei suoi parametri, toccando con un contatto di secondo ordine una logaritmica, è *vice versa* da questa toccata egualmente con un contatto del secondo ordine. Ora si può dimandare come avviene che cercando qual grado di contatto vi può essere tra queste due curve, presa per toccante la parabola, si ritrova che questo è del secondo ordine, e presa per toccante la logaritmica, non vi è neppur contatto, ma una semplice intersecazione: eccone la spiegazione. Disegnata sul piano delle coordinate una logaritmica, e scelto un punto corrispondente all' ascissa x, se vogliamo che quivi sia incontrata da una parabola l' asse della quale sia parallelo all' asse dell' ascisse, che, cioè, abbia per equazione $q = a + bp + cp^2$, possiamo procurare questo incontro in tre maniere: l' una si è coll' ingrandire o col diminuire la parabola; la seconda col trasportare avanti o addietro il di lei vertice, e la terza coll' accostare o scostare l' asse della parabola da quello dell' ascisse. Facendo uso di uno solo di questi modi, altro non possiamo pretendere che di avere in siffatto incontro una intersecazione; avremo poi

un contatto di primo ordine se faremo uso di due contemporaneamente, ed adoperandoli tutti e tre insieme, potremo avere un contatto del secondo ordine: la logaritmica e la parabola allora si toccheranno in questo punto con quel contatto. E qui avvertiamo che se in altro punto della logaritmica si volesse un simil contatto, questo si avrebbe trovando un'altra parabola, ben diversa dalla prima, che soddisfacesse al bisogno.

Se per l'opposto data è disegnata nel piano una parabola, e scelto un punto corrispondente all'ascissa x, vorrento che quivi sia incontrata da una logaritmica, delle cui coordinate sia stabilita l'origine, e sia pure stabilito il suo asse, a noi altro modo non resterà per ottener quell'incontro se non che variare la grandezza della logaritmica; e con questo modo solo non potremo sperare di avere altro che una sola intersecazione. Tutto questo confronta con quanto dall'algebra abbiamo sopra ricavato. Ma può talvolta avvenire che anche con questo modo solo si ottenga in quell'incontro un contatto di secondo ordine: questo succederà allora quando, per una fortunata combinazione, il punto d'incontro avrà per ascissa una tale quantità che, sostituendo essa ed il valore del parametro della logaritmica nell'espressioni generali dei parametri della parabola, trovate al § 90, ci verranno per risultamenti tre quantità eguali appunto ai tre dati parametri della parabola disegnata sul piano, e da noi scelta per esser toccata dalla logaritmica. In un solo punto però potrà essere questa osculazione, mentre in tutti gli altri vi potrà, se si vuole, essere un'intersecazione; chè se poi la toccante logaritmica avesse indeterminata e la sua origine e la direzione del suo asse, allora nella di lei equazione si troverebbero quattro parametri indeterminati, e quindi essa potrebbe avere con la parabola, in qualunque punto di questa, non solo un contatto di secondo ordine, ma ancora del terzo.

Queste osservazioni possono facilmente estendersi anco alle curve qualunque esse si siano. Io presi a confrontare una parabola con una logaritmica per esporre con più chiarezza le cose.

§ 93. Se l'ascissa del punto del contatto fosse tale che i valori dei differenziali $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ecc. fossero infiniti, sarebbe questo un contrassegno (§ 47) che in quel punto non vi può essere un contatto: vedremo in fatti a suo luogo che questo è allora uno di quei che diconsi *singolari*, perchè in essi s'incontra qualche singolare proprietà, e nel nostro caso appunto vedremo che la proprietà che ritrovasi in detto punto non ammette contatto.

§ 94. La ricerca delle curve *asintotiche* avendo qualche relazione con quella delle curve *toccanti*, credo bene il farne un breve cenno.

Sia $y=f(x)$ l'equazione di una curva data, $q=F(p)$ quella di un'altra curva che si vuole paragonare con lei. Facciamo $x=\frac{1}{\omega}$, $p=\frac{1}{\theta}$, e le equazioni diverranno $y=f'(\omega)$, $q=F'(\theta)$ indicando con f', F' le due funzioni che si ottengono con sì fatta sostituzione. Ora supponiamo che col mezzo della formola (F) del § 39 si sviluppino le due funzioni $f'(\omega)$, $F'(\theta)$ in serie, e che siano

$$y=A+B\omega+C\omega^2+E\omega^3+\text{ecc.},$$

$$q=A'+B'\theta+C'\theta^2+E'\theta^3+\text{ecc.},$$

i coefficienti A', B', C', ecc. saranno funzioni dei parametri indeterminati che ritrovansi nell'equazione $q=F(p)$. Facciamo $\theta=\omega$, ed avremo

$$y=A+B\omega+C\omega^2+E\omega^3+\text{ecc.},$$

$$q=A'+B'\omega+C'\omega^2+E'\omega^3+\text{ecc.},$$

e la distanza Δ delle due curve nei due punti corrispondenti alla stessa ascissa ω sarà

$\Delta = y - q = A - A' + (B - B')\,\omega + (C - C')\omega^2 +$ ecc.

Primieramente osservo che le due curve non potranno incontrarsi, se non sarà $A = A'$, ed $\omega = 0$; quest' incontro seguirà però ad una infinita distanza, poichè l' ascissa x che vi corrisponde sarà $x = \frac{1}{0}$; secondariamente osservo che un raziocinio compagno a quello da noi fatto (§ 76 e seguenti) nel dare la teorica dei contatti, ci conduce a concludere che se $A = A'$, si potrà prendere ω tanto piccolo, che equivale a dire x tanto grande, che una terza curva non potrà passare tra quelle due, se ancora l' ordinata di questa sviluppata secondo le potenze dell' ascissa ω non avrà il primo termine dello sviluppo eguale ad A ovvero A': nel modo stesso quando fosse $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, ecc., una terza curva non potrà passare tra quelle due, se i primi tre termini dello sviluppo della sua ordinata non eguaglieranno i rispettivi termini degli altri sviluppi. L' eguaglianza poi dei termini di quei due sviluppi si potrà ottenere col mezzo di un' idonea determinazione dei parametri i quali ritrovansi nella equazione $q = F(p)$.

Sia la prima curva un' iperbola equilatera riferita ai suoi asintoti che noi poniamo paralleli ai due assi delle coordinate x, y. Le coordinate del centro dell' iperbola siano a, b, e la di lei equazione sia $y = b + \frac{m^2}{x - a}$, ove b, m, a sono tre parametri determinati.

L' altra curva che noi prendiamo a confrontare con questa, sia una linea retta la cui equazione sia $q = \alpha + \beta p$, essendo α, β due parametri indeterminati. Ponendo in queste due equazioni $\frac{1}{\omega}$ in vece dell' x e del p, e sviluppando i valori dell' y e del q in serie, come è detto qui sopra, avremo

$$y = b + m^2\omega + m^2 a\omega^2 + m^2 a^2 \omega^3 + \text{ecc.},$$

$$q = \alpha + \frac{\beta}{\omega}.$$

Qui facendo $\alpha = b$, e $\beta = 0$, concluderemo che una linea retta parallela all' asse dell' ascisse, e da esso distante della quantità b non incontrerà la curva che ad una distanza infinita dall' origine dell' ascisse, ma vi si avvicinerà tanto che niun' altra retta potrà continuamente passare tra di essa e la curva. Una tale linea è lo stesso asintoto: esso possiede adunque questi pregi, come anco si sa per altre parti.

§ 95. In generale, se sostituito $\frac{1}{\omega}$ in vece dell' x e del p in quelle due equazioni $y = f(x)$, $q = F(p)$ delle due curve da confrontarsi, troveremo

$$y = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = A\omega^{e} + B\omega^{e+l} + C\omega^{e+l+h} + \text{ecc.},$$

$$q = F\left(\frac{1}{\omega}\right) = A'\omega^{r} + B'\omega^{r+s} + C'\omega^{r+s+t} + \text{ecc.};$$

e se la qualità delle funzioni ed un' idonea determinazione dei parametri contenuti nella funzione $F(p)$ farà sì che i primi termini dello sviluppo di $f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ siano eguali a quei dello sviluppo di $F\left(\frac{1}{\omega}\right)$ {ciò che avverrà se $A = A'$, $e = r$, $B = B'$, $s = l$ ecc.}, potremo concludere esser sempre possibile di dare all' ω un tal valore che nessun' altra curva rappresentata da un' altra equazione $y = \phi(x)$ potrà passare tra le due prime nel luogo corrispondente all' ascissa $x = \frac{1}{\omega}$, ed in quei corrispondenti ad ascisse maggiori, se i primi termini dello sviluppo della

funzione $\phi\left(\frac{1}{\omega}\right)$ non saranno eguali ai respettivi termini degli altri sviluppi.

E di qui dedurremo che data la curva, la cui equazione è

$y=fx=Ax^{-e}+Bx^{-e-l}+Cx^{-e-l-h}+\text{ecc.}$,
ad essa si accosterà continuamente la curva $y=Ax^{-e}$, e tanto più quanto sarà maggiore l' ascissa; di modo che vi sarà un' ascissa tale al di là della quale nessun' altra curva, la cui equazione sia $y=\phi(x)$, potrà passare tra quelle due, se sviluppato $\phi(x)$ in serie ordinata a seconda delle potenze discendenti dell' x, non sarà Ax^{-e} il suo primo termine.

Egualmente la curva dell' equazione

$y=Ax^{-e}+Bx^{-e-l}$ si avvicinerà continuamente alla curva data $y=fx$, e tanto più quanto più cresce x; di modo che vi sarà un' ascissa al di là della quale nessun' altra curva dell' equazione $y=\phi(x)$ potrà passare tra di esse, se i primi due termini dello sviluppo di $\phi(x)$ non saranno

$Ax^{-e}+Bx^{-e-l}$, e così di mano in mano. Queste curve si chiamano curve *asintotiche*.

Ecco dunque in che consiste il metodo di trovare la curva asintotica di una curva data.

Essendo $y=fx$ l' equazione di una data curva, si procuri di sviluppare la y in serie secondo le potenze discendenti dell' x, e sia

$$y=Ax^{e+l}+Bx^{l}+C+\frac{E}{x^{n}}+\frac{F}{x^{n+h}}+\text{ecc.}$$

Allora $y=Ax^{e+l}+Bx^{l}+C$ sarà l' equazione di quella curva di genere parabolico che farà da asintoto alla proposta.

Se prenderemo poi altri termini, avremo anche le curve

$$y = Ax^{e+l} + Bx^{l} + C + \frac{E}{x^{n}},$$

$$y = Ax^{e+l} + Bx^{l} + C + \frac{E}{x^{n}} + \frac{F}{x^{n+h}}, \text{ ecc.},$$

le quali saranno altrettanti asintoti curvilinei della proposta medesima.

Se la y potesse avere altri valori, noi con le serie che li rappresentano troveremmo altre curve asintotiche della proposta curva.

CAPO X.

Dell' evolute.

§ 96. Prima di parlare dell' *evolute* fa di bisogno premettere alcune cose.

Archimede ha stabilito quale assioma che *di due curve o di due linee composte in qualunque modo si voglia di pezzi di rette e di curve, le quali terminino ai medesimi punti estremi, e che voltano la concavità tutte dalla medesima banda, è maggiore l' una che contiene entro di sè l' altra.* Tutt' i Geometri antichi e moderni hanno convenuto di questa verità, e noi quindi l' adopreremo per trovare il differenziale dell' arco di una curva qualunque.

Sia dunque (*Fig.* 6) la curva ZZ riferita all' asse AB, e ad un altro a questo perpendicolare: sia $AP = x$, $PM = y = f(x)$, $PQ = \omega$,

$$QN = f(x+\omega) = y + \omega\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.};$$

si conduca nel punto M la tangente MT alla curva, la quale tangente incontri in T l' ordinata QN prolungata quanto basti; si conduca MR perpendicolare ad NQ, e si tiri la corda MN. Tutto ciò si finga

che la figura $AQNTMZ$ si ripieghi sopra sè medesima, onde dalla banda opposta siavi una figura compagna $QNTmZ'$. L' arco MON, qualunque sia la curva, è sempre minore della tangente MT, e maggiore della corda MN: che sia maggiore della corda, lo dice l' assioma di Archimede: rispetto alla tangente, essendo in virtù dello stesso assioma la somma delle due tangenti eguali MT, Tm maggiore della somma dei due archi eguali MN, Nm, sarà anco $MT > MN$.

Ora rappresentato colla funzione $\phi\ (x)$ l' arco ZM, avremo

$$MT = \omega \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}};$$

$$MN = \omega \sqrt{\left\{ 1 + \left[\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\omega}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.}\right]^2 \right\}};$$

$$MON = \phi(x+\omega) - \phi(x) = \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ecc.};$$

e facendo $\frac{\omega}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \text{ecc.} = \theta$, e $\left(\frac{dy}{dx}\right) = p$, queste tre quantità diverranno

$$NT = \omega \sqrt{(1+p^2)};$$

$$MON = \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) + \text{ecc.};$$

$$MN = \omega\sqrt{(1+p^2)} + \omega\theta\left\{\frac{d\sqrt{(1+p^2)}}{dp}\right\} + \text{ecc.}$$

Supponendo di aver sostituito nella terza di queste quantità il valore del θ, si avrà una espressione di questa forma

$$MN = \omega\sqrt{(1+p^2)} + \omega^2 P + \omega^2 Q + \text{ecc.}:$$

ma l' arco MON debb' esser sempre minore della tangente MT, e maggiore della corda MN, dunque $MT - MN > MT - MON$; ovvero non computati i segni $MN - MT > MON - MT$.

Avremo pertanto, qualunque sia la curva,

$$\omega^2 P + \omega^3 Q + \text{ecc.} > \left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - \sqrt{(1+p^2)}\right\}\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \text{ec.};$$

e questo rapporto non può esser vero generalmente per qualunque valore a noi piaccia di assegnare all'ω,

se non che facendo $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \sqrt{(1+p^2)}$;

dunque il differenziale di un arco qualunque di una curva sarà sempre rappresentato da $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}dx$.

§ 97. Rappresentiamo ora con s l'arco di una curva qualunque, e sarà $\left(\frac{ds}{dx}\right) = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$;

ma il raggio di curvatura (§ 82) è

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}, \text{ dunque sarà } R = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Se poi le variabili x, y, s si risguardano come funzioni di un'altra variabile t, allora ponendo $\left(\frac{ds}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$ in vece del $\left(\frac{ds}{dx}\right)$, e $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$ in vece del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}} : \left(\frac{dx}{dt}\right), \text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}, \text{ e quindi}$$

$$R = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}.$$

Ponendo in fine $s = t$, avremo

$$R = \frac{1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)}.$$

Con tal formola si può esprimere il raggio osculatore, quando le coordinate si considerano funzioni dell' arco.

§ 98. Chiamate a, b (*Fig.* 7) le coordinate AD, DC del centro C del circolo osculatore della curva EF nel punto H, noi abbiamo trovato (§ 82)

$$a = AD = x - \left(\frac{dy}{dx}\right)\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$b = DC = y + \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

se sostituiamo in queste espressioni il valore dell' y datoci dall' equazione della curva EF, diverranno esse due funzioni dell' x: supponiamo adunque $a = \Psi x$, $b = \Psi' x$, e questi due valori dell' a e del b saranno quei che convengono al punto H corrispondente all' ascissa $AN = x$. Se ora col mezzo delle due equazioni $a = \Psi x$, $b = \Psi' x$ eliminiamo la x, avremo un' equazione fra le coordinate a e b, che rappresenterà la curva $ECCP$, la quale sarà il luogo geometrico di tutt' i centri dei circoli osculatori corrispondenti ai diversi punti della curva EF. Esaminiamo ora questa curva dei centri; e primieramente cerchiamo la direzione della di lei tangente in qualunque punto C.

Da quello che si disse superiormente (§ 79) consta che la tangente della curva $EGCP$ condotta in un qualunque di lei punto C fa con l' asse AB

un angolo che ha per tangente $\left(\frac{db}{da}\right)$ ovvero $\left(\frac{db}{dx}\right) : \left(\frac{da}{dx}\right)$, perchè b ed a sono funzioni dell' x. Tra le due coordinate a, b essendovi sempre questa relazione $a = x - (b - y)\left(\frac{dy}{dx}\right)$, se noi la differenziamo rispetto all' x, avremo

$$\left(\frac{da}{dx}\right) = 1 - (b - y)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{db}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Ma $b - y = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, dunque, fatta la sostituzione e riduzione, si avrà

$\left(\frac{da}{dx}\right) = -\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{db}{dx}\right)$, e quindi $\left(\frac{db}{dx}\right) : \left(\frac{da}{dx}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. E questa appunto sarà l' espressione della tangente di quell' angolo fatto dalla tangente della curva dei centri nel punto C con l' asse AB; ma la tangente dell' angolo HMB che il raggio osculatore HC fa con l' asse AB, è appunto $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; dunque il raggio osculatore HC è tangente della curva dei centri nel punto C. Dunque fra una curva EF e la sua curva dei centri vi è questa corrispondenza, che le perpendicolari alla prima di queste curve sono tangenti della seconda.

§ 99. Dimostriamo un' altra singolare proprietà di questa curva dei centri. Indicando con s il di lei arco EGC, avremo (§ 97) $\left(\frac{ds}{dx}\right) = \sqrt{\left\{\left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2\right\}}$,

ove sostituendo in vece di $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{db}{dx}\right)$ i loro valori, troveremo

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}:$$

ora se differenziamo il valore del raggio osculatore $R=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}:\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, otteniamo

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

dunque $\left(\frac{ds}{dx}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right)$, cioè *il differenziale dell' arco della curva dei centri è eguale al differenziale del raggio osculatore*. Dunque il raggio osculatore e l' arco della curva dei centri che a questo raggio corrisponde, sono due tali funzioni dell' x che hanno lo stesso differenziale primo; dunque *il raggio osculatore è eguale all' arco suddetto*, cioè $R=s$, ed in fatti dalla differenziazione di quest' equazione ritorna $\left(\frac{dR}{dx}\right)=\left(\frac{ds}{dx}\right)$: avremo pertanto $hc=EGc$, $HC=EGC$, ecc.

E di qui segue che fasciata la curva *EGCP* (*Fig.* 7) con un filo il quale si adatti perfettamente alla di lei curvità, e svolgendo questo filo, e tenendolo sempre teso nelle posizioni *hc*, *HC* ecc., si descriverà con l' estremità *E* la curva *EhHF*, con la quale operazione avremo le due curve *EGCP*,

EhHF, che saranno quelle da noi qui sopra considerate; le porzioni del filo *hc*, *HC* ecc. saranno sempre tangenti nei punti *c*, *C* ecc., ed eguali agli archi *EGc*, *EGC* ecc.: *EGCP* sarà la curva dei centri di curvatura della curva *EhHF*.

Delle due curve la *EGCP* si chiama la *sviluppata* o l' *evoluta*, e l'altra *EhHF*, la *sviluppante* o l' *evolvente*. La sviluppata adunque è formata dai centri di curvatura della sviluppante.

Facciamo qualche esempio.

Data l' equazione della parabola apolloniana $y^2 = mx$, si dimanda il valore del raggio osculatore di questa curva, e l' equazione della curva dei centri.

Essendo $y = \sqrt{(mx)}$, sarà

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{x}},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{x^3}};\ \text{dunque } (\S\ 82)$$

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{x^3}}} = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}$$

$$= -\frac{(4x + m)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m}};$$

e siccome la posizione del raggio ci è data dalla posizione del centro di curvatura, perciò possiamo prendere $R = \frac{(4x + m)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m}}$ senz'aver riguardo al segno.

Facendo in questa formola $x = 0$, avremo $R = \frac{m}{2}$, e questo sarà il raggio osculatore al vertice della parabola.

Per le coordinate a, b del centro (§ 82) si ha

$$a = x + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)\cdot 4\sqrt{\left(\frac{x^3}{m}\right)} = 3x + \frac{m}{2},$$

$$b = \sqrt{(mx)} - \left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{m}{x}\right)\cdot 4x\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)} = -4x\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)},$$

ed eliminando x da queste due equazioni, avremo $27mb^2 = 16\left(a - \frac{m}{2}\right)^3$; tale equazione sarà quella della curva dei centri, la quale è una seconda parabola cubica.

La considerazione poi dei valori di a e di b (*Fig.* 7) ci dimostra che questa curva dei centri debb'essere al di sotto dell' asse AB pel ramo EHF, ed al di sopra per l' altro ramo che sta al di sotto; essa poi debbe avere l'origine in G, essendo $GE = \frac{m}{2}$.

§ 100. Sia AHF (*Fig.* 8) una mezza cicloide, il cui circolo genitore sia ADB; facciamo $AN = x$, $NH = y$, $AB = 2a$. La proprietà della cicloide, in virtù della quale $NH = ND + AGD$, ci dà l' equazione $y = \sqrt{(2ax - x^2)} + Ar\,sen\,v.\,x$; dunque

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a - x}{\sqrt{(2ax - x^2)}} + \frac{a}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{\sqrt{(2a - x)}}{\sqrt{x}}$$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{a}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$; e fatte le opportune sostituzioni, si trova

$R = 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)} = 2\sqrt{\{2a(2a - x)\}} = 2\sqrt{(AB \cdot BN)}$; ma $AB \cdot BN = (BD)^2$ (*Fig.* 11), dunque $R = 2BD$, cioè il raggio osculatore del punto H è doppio della corda BD.

Le coordinate del centro di curvatura C, le quali indicheremo con t, u per non confonderle con la lettera a che rappresenta il semidiametro, saranno $t = 4a - x$, $u = A\,sen\,v.\,x - \sqrt{(2ax - x^2)}$; ed eliminando x per mezzo di queste due equazioni, avremo $u = A\,sen.\,v.\,(4a - t) - \sqrt{\{2a(4a - t) - (4a - t)^2\}}$: e quest' ultima equazione sarà quella della curva dei centri.

Ora è facile dimostrare che una tal curva FCO è la stessa cicloide AHF, ma posta inversamente ed in quella guisa che rappresenta la figura 8; in fatti facendo $BO = AB = 2a$, compiendo il rettangolo $BFLO$, e descrivendo sopra FL il semicircolo FPL, sarà $MO = QL = AO - AM = 4a - t$, e perciò $u = A\,sen\,v.\,QL - \sqrt{\{2a \cdot QL - (QL)^2\}}$, ovvero $u = PL - QP$; ed in conseguenza $QC = QM - CM = LPF - u = FP + PQ$, nel che sta la proprietà della cicloide FCO, il cui circolo genitore è FPL.

§ 101. Data una curva, noi abbiamo detto come può aversi il luogo geometrico dei centri dei circoli osculatori, che equivale a dire, data una curva sviluppante, abbiamo insegnato a trovarne la sviluppata; potrebbe però proporsi il problema inverso: *Data*, cioè, *la sviluppata*, *trovarne la sviluppante.*

Sia per esempio $b = \phi(a)$ l'equazione della sviluppata, ed avremo allora

$$a = x - \left(\frac{dy}{dx}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$b = \phi(a) = y + \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

se ora col mezzo di queste due equazioni eliminiamo a, avremo tra x, y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ un'equazione che sarà quella della sviluppante, la quale appartiene alla sviluppata $b = \phi(a)$. Quest' equazione però sarà un'equazione differenziale, dalla quale converrà ricavare il valore dell' y dato col mezzo dell' x: sì fatta ricerca spetta al calcolo integrale.

CAPO XI.

Dei contatti delle curve a doppia curvatura.

§ 102. Chiamansi curve *a doppia curvatura* quelle linee le quali non possono essere disegnate in un piano. Tutti i punti di queste curve si riferiscono a tre piani ortogonali immaginati nello spazio, e volendo esprimere con l' algebra queste curve, si adoperano l' equazioni delle loro projezioni su di quei piani. Così rappresentando con x, y, z le tre coordinate ortogonali di un punto qualunque della curva, se $y=\phi(x)$ ne rappresenta la projezione sul piano delle coordinate x, y, e se $z=\psi(x)$ ne rappresenta l' altra projezione sul piano delle z, x, il complesso delle due equazioni $y=\phi(x)$, $z=\psi(x)$ ci rappresenta quella curva a doppia curvatura, in quanto che niun' altra curva a doppia curvatura può esservi, per la quale siano contemporaneamente vere le relazioni tra le coordinate x, y, z, le quali ci sono annunziate da siffatte equazioni; eliminata la x da queste equazioni, si avrà una terza equazione tra y e z, che sarà quella della terza projezione sul piano delle coordinate y e z: due qualunque poi di queste tre equazioni basterebbero egualmente a darci l' algebratica espressione della curva a doppia curvatura. E generalmente parlando, due qualunque equazioni diverse tra le tre coordinate di una curva a doppia curvatura atte sono a rappresentarcela.

Supponiamo che si voglia rappresentare una spirale circolare condotta nello spazio, la quale abbia per asse lo stesso asse delle z che io suppongo verticale. Immaginiamoci un cilindro che abbia questo medesimo asse, e sopra di lui fingiamo disegnata la spirale: è evidente che se da ciascun punto della spirale abbasso delle perpendicolari sul piano orizzontale, queste cadono tutte nella circonferenza della base del cilindro: se dunque a è il raggio di questo cilindro, sarà $x^2+y^2=a^2$ l' equazione della projezione della spirale sul piano orizzontale.

Per avere l' altra equazione della projezione sopra il piano degli y e z, si osservi che questa curva produce una retta sopra lo sviluppo della superficie del cilindro; così quest' equazione sarà $z = b \cdot A\,sen\,y + c$, essendo b, c due costanti.

La nostra spirale dunque sarà rappresentata dal complesso di queste due equazioni

$x^2 + y^2 = a^2$

$z = b \cdot A\,sen\,y + c.$

La costante c può servire a determinare il passaggio della spirale per un dato punto, e la b per determinare l' inclinazione della spirale.

Le curve a doppia curvatura possono anco risguardarsi come l' intersecazione di due superficie curve, anzi sogliono per lo più considerarsi sotto questo aspetto.

§ 103. Immaginiamoci ora una superficie curva condotta nello spazio. Ciascun punto di essa è determinato nella posizione col mezzo delle distanze di esso da tre piani ortogonali, e queste distanze che chiamansi le coordinate di quel punto, siano rappresentate colle lettere x, y, z. Poniamo che l' asse delle ordinate z sia verticale, ed in conseguenza il piano delle altre x, y orizzontale. Queste tre coordinate x, y, z, in qualunque superficie siasi, generalmente parlando, sono sempre tali che se due di esse, per esempio, non cambiano valore, nè pure la terza z lo cambia.

Ma se alcuna di queste tre coordinate soffre qualche cangiamento, le altre due o almeno una di esse dovrà anche cangiare, se vorremo che le tre coordinate appartengano sempre a qualche punto della superficie curva: queste tre quantità dunque x, y, z hanno tra loro una qualche dipendenza, in virtù della quale una è funzione delle altre due; per esempio, z è funzione dell' x e dell' y, ciò che possiamo indicare con $z = \phi\,(x, y)$.

Dunque una superficie curva qualunque sarà rappresentata da $z = \phi\,(x, y)$, essendo x, y, z le di-

lei coordinate ortogonali. La forma particolare della funzione $\phi(x, y)$, o la maniera particolare con la quale x, y entrano a comporre quel secondo membro, dipenderà dalla qualità particolare della superficie che vuolsi rappresentare.

L' equazione $z = \phi(x, y)$ può anche avere la forma $F(x, y, z) = 0$, indicando col primo membro una funzione qualunque delle tre coordinate x, y, z.

Si dice che una superficie curva è espressa dall' equazione $F(x, y, z) = 0$, perchè la possiamo immaginare come costruita col mezzo di questa equazione: in fatti dati ad x, y due valori a, b, si determinerà un punto nel piano orizzontale, nel quale innalzando una perpendicolare eguale al valore che ci dà per z l' equazione $F(a, b, z) = 0$, si avrà nello spazio un punto che apparterrà a quella superficie; e fingendo d' aver fatta quest' operazione in tutti gli altri punti del piano orizzontale, ci potremo immaginare ritrovati nello spazio altrettanti punti corrispondenti, dai quali passerà la superficie curva.

Rappresentando con $F(x, y, z) = 0$ una superficie curva, finchè x, y restano indeterminate (per il che tale anche resta z), quest' equazione appartiene a ciascun punto di quella superficie; ma se diamo all' x un valore particolare e costante, se, per esempio, facciamo $x = a$, allora l' equazione apparterrà a quei punti soli della superficie pe' quali l' ascissa x è sempre la stessa ed eguale ad a. Questi sono i punti di una sezione che si farebbe in quella superficie, conducendo un piano che la segasse, distante parallelamente dal piano verticale delle y, z delle quantità a. Si potrebbe fare una simile considerazione rispetto agli altri piani.

§ 104. Supponiamo ora che abbiansi due equazioni

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$F'(x, y, z) = 0.$$

Ciascuna di queste rappresenterà una superficie curva condotta nello spazio. Queste due superficie possono essere situate in modo che una non incontri l'altra, possono toccarsi, o possono intersecarsi vicendevolmente. Lasciando per ora il caso del contatto, se esse si tagliano tra loro, l'intersecazione sarà in generale una curva a doppia curvatura; dico in generale, perchè se una delle due superiori equazioni rappresentasse un piano, la sezione sarebbe una curva piana.

Onde avere l'equazioni che rappresentano questa curva a doppia curvatura, cioè l'equazioni delle di lei projezioni, ecco come si farà. Nei punti dell'intersecazione le coordinate x, y, z appartengono nello stesso tempo alle due superficie curve; dunque per questi punti l'equazioni $F(x, y, z) = 0$, $F'(x, y, z) = 0$ sono vere nello stesso tempo.

Se fra queste due equazioni adunque eliminiamo z, avremo un'equazione della forma $f(x, y) = 0$, la quale conterrà la relazione tra l'x e l'y appartenente a tutti i punti di quell'intersecazione: essa ne rappresenterà per ciò la projezione sopra il terzo piano delle x, y: nel modo stesso eliminando y, avremo un'equazione $f'(x, z) = 0$, che sarà quella della projezione sul piano verticale delle x, z; ed eliminando x, si avrà la projezione sopra il terzo piano rappresentata da $f''(y, z) = 0$.

Siccome la verità contemporanea delle due equazioni $F(x, y, z) = 0$, $F'(x, y, z) = 0$ rappresenta necessariamente l'intersecazione di due superficie, cioè una curva a doppia curvatura, e ci dà col mezzo delle semplici regole dell'eliminazione le projezioni di questa curva; quindi è che possiamo anche in generale risguardare una curva a doppia curvatura, come nata dall'intersecazione di due superficie, e rappresentata dal complesso delle due equazioni di quelle superficie medesime; anzi sotto questo aspetto è esattissima l'espressione *a doppia curvatura*, poichè una curva tale trovandosi nello

stesso tempo situata in due superficie curve, gode anche nel tempo stesso della curvità di ciascuna.

§ 105. Abbiamo detto qui sopra che nell' equazione $z = \phi(x, y)$ rappresentante una superficie curva, la maniera con la quale x, y entrano a formare la funzione $\phi(x, y)$, dipende dalla qualità o natura speciale della superficie. Questa natura speciale di una superficie o può ricavarsi dalla considerazione del moto con cui essa è generata, la quale ci potrà fare scoprire come le variazioni che riceve la z, dipendano da quelle che ricevono le x, y; o dal considerare alcuna proprietà caratteristica appartenente a ciascun punto della curva: proprietà che possa esprimersi con una equazione tra le coordinate: in questo secondo caso non si saprà in vero *a priori*, come le variazioni di alcune coordinate cagionino quelle delle altre, ma saremo certi che devono variare in maniera da dar sempre luogo a quella proprietà. Per esempio, se si vorrà l' equazione della superficie sferica col raggio r, si rifletterà che una proprietà caratteristica di ciascuno dei suoi punti è, che la distanza di esso dal centro è eguale al raggio r: se dunque chiamiamo x, y, z le coordinate di un qualunque punto della superficie sferica, ed a, b, c quelle del suo centro, avremo rappresentato da

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ il quadrato della distanza di questi due punti; sarà dunque

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

l' equazione che rappresenta la superficie di una sfera col raggio r, e che ha il centro in un punto dello spazio corrispondente alle coordinate a, b, c.

§ 106. Per modo d' esempio cerchiamo l' equazione delle superficie cilindriche. Data nello spazio una qualunque linea retta, se c' immaginiamo un' altra retta cui si dà il nome di generatrice, la quale si muova, restando però sempre parallela alla data, e che lasci in questo movimento continuo vestigio

del suo passaggio, verrà così a descriversi una superficie curva; e tutte le superficie generate in questa guisa hanno il nome di *superficie cilindriche.*

Supponiamo che la data retta passi dall' origine delle coordinate, e se non vi passasse, da quel punto gli si condurrebbe una parallela che potrebbe prendersi in vece di essa: siano l'equazioni di questa retta $x = az$, $y = bz$.

La retta generatrice dovendo esser parallela alla data, le sue equazioni saranno

$$x = az + \alpha, \; y = bz + \beta,$$

nelle quali a, b sono costanti, qualunque sia la situazione della generatrice; ma le quantità α, β che sono costanti per una medesima situazione della generatrice, variano allorchè la generatrice passa da una situazione ad un' altra; così in ogni superficie cilindrica, mentre il punto che si considera, cangia di luogo senza uscire dalla medesima retta generatrice, le due quantità α, β, ovvero i loro valori $x - az$, $y - bz$, sono costanti; e se questo punto si muove in modo da andare da un luogo della generatrice ad un altro, queste quantità variano ambedue: dunque queste due quantità α e β sono costanti insieme e variabili insieme: esse dunque sono l' una funzione dell' altra; si avrà in conseguenza $\beta = \phi(\alpha)$, ovvero $y - bz = \phi(x - az)$.

Quest' equazione $y - bz = \phi(x - az)$ sarà l' equazione generale delle superficie cilindriche, e la forma della funzione che ne compone il secondo membro, dipenderà dalla natura della curva, la quale dirige il moto della generatrice: se questa curva non è sottomessa alla legge di continuità, se, cioè, le sue projezioni non possono esprimersi ciascuna con una equazione, la forma di quella funzione non può esprimersi analiticamente.

L' equazioni poi della retta generatrice saranno

$$x - az = \alpha$$

$$y - bz = \phi(\alpha),$$

a essendo la quantità che dà la particolare situazione di questa retta.

Se fosse data ancora la curva a doppia curvatura, la quale regola il movimento della generatrice, allora si potrebbe determinare la forma della funzione $\phi(a)$ che conviene a quella superficie particolare che si considera.

In fatti siano $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$ le due equazioni date della curva a doppia curvatura; siccome la generatrice dee in tutte le sue situazioni passare per la data curva, bisognerà che le quattro equazioni

$F(x,y,z) = 0$, $f(x,y,z) = 0$, $x - az = \alpha$, $y - bz = \phi(\alpha)$

stiano a martello nello stesso tempo, qualunque sia il valore di α; dunque se da queste quattro equazioni si eliminano le tre quantità x, y, z, si avrà tra α, $\phi(\alpha)$ un' equazione che rappresenteremo con $\Psi\{\alpha, \phi(\alpha)\} = 0$, la quale determinerà il valore di $\phi(\alpha)$, cioè la forma della funzione ϕ.

Rimettendo poi in vece dell' α e $\phi(\alpha)$ i rispettivi valori, si avrà l'equazione $\Psi(x - az, y - bz) = 0$ per rappresentare quella particolare superficie cilindrica.

Sia per esempio la curva direttrice del movimento un circolo disegnato nello spazio: siccome un circolo risulta sempre dall' intersecazione di una superficie sferica con un piano, perciò le quattro equazioni qui sopra citate saranno

$(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 - r^2 = 0$,

$Ax + By + Cz + D = 0$,

$x - az = \alpha$,

$y - bz = \phi(\alpha)$,

dalle quali eliminando x, y, z, si otterrebbe l'equazione tra α e $\phi(\alpha)$, ed in conseguenza ci sarebbe conosciuta la forma della funzione $\phi(\alpha)$.

§ 107. Siano ora $y=fx$, $z=\phi x$ l' equazioni di una qualunque curva a doppia curvatura. Siano parimente $q=Fp$, $r=\Phi p$ l' equazioni di un' altra curva a doppia curvatura data, della quale p, q, r sono le coordinate rispettivamente agli stessi tre piani ortogonali.

Onde le curve abbiano un punto comune, converrà che, facendo $p=x$, abbiasi $q=y$, $r=z$, che, cioè, sia $y=Fx$, $z=\Phi x$. Questa circostanza ci darà le due equazioni $fx=Fx$, $\phi x=\Phi x$, colla risoluzione delle quali se troveremo uno o più valori reali dell' x, che soddisfacciano ad ambedue l' equazioni, avremo uno o più punti comuni in quelle curve; e quando non vi sia un punto comune, ma nell' equazioni della seconda curva si trovino due parametri indeterminati, potremo allora determinarli e farli funzioni di un' ascissa x, cui si vuole che corrisponda il punto comune, in guisa che quelle due equazioni siano vere nel tempo stesso.

Siavi un punto comune, e consideriamo le porzioni delle curve al di là di esso. In quel punto comune le coordinate della prima curva sono x, fx, ϕx, e quelle della seconda x, Fx, Φx; nei punti poi corrispondenti ad un'altra ascissa comune $x+\omega$ le coordinate della prima curva saranno $x+\omega$, $f(x+\omega)$, $\phi(x+\omega)$; e quelle della seconda $x+\omega$, $F(x+\omega)$, $\Phi(x+\omega)$.

Ora se noi poniamo

$$D=F(x+\omega)-f(x+\omega)$$
$$=\omega\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)-\left(\frac{df}{dx}\right)\right\}+\frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\right\}+\text{ecc.},$$
$$\Delta=\Phi(x+\omega)-\phi(x+\omega)$$
$$=\omega\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\}+\frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\right\}+\text{ecc.},$$

sarà la distanza di quei due punti, la quale noi rappresenteremo con δ, $\delta=\sqrt{(D^2+\Delta^2)}$.

Questo valore di δ sarà tanto minore, quanti più termini si annulleranno nelle due serie che esprimono i valori dei D, Δ, e quindi tanto più le due curve si avvicineranno tra loro.

Quando si annullano i coefficienti delle prime potenze di ω, la cui mercè

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)=\left(\frac{df}{dx}\right),\ \left(\frac{d\phi}{dx}\right)=\left(\frac{d\Phi}{dx}\right),$$

le due curve hanno un primo grado di avvicinamento tra loro, al quale si dà il nome di *contatto del primo ordine*: quando si annullano i coefficienti delle potenze seconde di ω, le due curve hanno un secondo grado di avvicinamento o un contatto di second' ordine, e così via via.

Dunque perchè due curve a doppia curvatura abbiano una semplice intersecazione corrispondente ad un' ascissa comune x, converrà che le loro coordinate rispettivamente si eguaglino tra loro: perchè quel punto sia un contatto del primo ordine, dovranno eguagliarsi anche i differenziali primi di quelle ordinate: dovranno essere di più eguali i differenziali secondi, se le curve debbono avere un contatto del second' ordine, e così di mano in mano.

Sono queste le proprietà analitiche dei contatti delle curve a doppia curvatura. Le proprietà geometriche poi consistono in questo, che due curve le quali hanno tra loro un contatto di un certo ordine n^{esimo}, non permettono ad una terza curva, la quale abbia lo stesso punto comune, di passare tra di esse, se questa non abbia con loro un contatto dello stesso o di un maggiore ordine.

E qui osserviamo che una curva a doppia curvatura dicesi *passare tramezzo* a due altre, quando le projezioni di quella passano tramezzo alle projezioni di queste.

Si vede dunque che tal grado di avvicinamento o di contatto hanno due curve a doppia curvatura,

quale lo hanno le loro projezioni, e inversamente. Così, per esempio, una linea retta sarà tangente di una curva a doppia curvatura, quando le due linee rette, projezioni della retta, saranno tangenti delle projezioni della curva medesima.

§ 108. Siano x, y, z le coordinate di una qualunque curva toccata, e p, q, r le coordinate della curva toccante per la quale si domandano le condizioni del contatto con la curva toccata.

Siano $F(p, q, r)=0$, $\Phi(p, q, r)=0$ l'equazioni della curva toccante: onde abbiasi tra queste due curve un punto comune corrispondente all'ascissa x, bisogna che le due equazioni si mantengano vere anco ponendovi x, y, z in vece di p, q, r, e che abbiasi in conseguenza $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$. Tali due equazioni ci daranno l'intersecazione semplice delle due curve a doppia curvatura.

Indichiamo con $F(p, q, r)'=0$, $\Phi(p, q, r)'=0$ i differenziali primi di quelle due equazioni presi rispetto a p e divisi per dp; acciò le due curve abbiano un contatto di primo ordine, non solo nel punto comune eguagliar si debbono le ordinate, ma ancora i differenziali primi di esse; dunque queste due ultime equazioni differenziali debbono anche stare se vi si porrà x, y, z in vece di p, q, r: avremo dunque $F(x, y, z)'=0$, $\Phi(x, y, z)'=0$; così quattro equazioni sono necessarie per istabilire un contatto del primo ordine tra due curve a doppia curvatura.

Ad avere un contatto del second'ordine dovranno verificarsi anco le due altre equazioni

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)=F(x, y, z)''=0, \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)=\Phi(x, y, z)''=0,$$

e così via via.

A siffatte equazioni di condizione pe' diversi ordini di contatto soddisfaremo col mezzo delle costanti arbitrarie a, b, c, ecc. che, quali parametri indeterminati, si troveranno nelle funzioni date $F(p, q, r)$, $\Phi(p, q, r)$. A queste quantità poi che

saranno funzioni determinate dell'$x, y, z, \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dx}\right)$, potremo dare il nome di *elementi del contatto*; come si fece per le curve piane.

§ 109. Se fosse una superficie curva quella che aver debbe un contatto con una curva a doppia curvatura, allora rappresentando con $F(p, q, r) = o$ la di lei equazione, dovrebbero aversi le due equazioni $F(x, y, z) = o$, $\left(\frac{dF}{dx}\right) = F(x, y, z)' = o$, onde vi fosse un contatto di primo ordine: vi si aggiungerebbe l' altra $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = F(x, y, z)'' = o$, onde il contatto fosse di second' ordine, e così via via. Tutto questo deriva dai medesimi principj.

E di qui si vede che una superficie sferica può avere con una curva a doppia curvatura un contatto di terz' ordine, e che quindi vi sono infinite sfere osculatrici di una curva a doppia curvatura.

§ 110. Si paragoni ora la linea retta con una curva qualunque a doppia curvatura. Le due equazioni che rappresentano la retta, sono $q = a + bp$, $r = c + ep$. Onde essa abbia un contatto di primo ordine, bisogna che ponendo in queste due equazioni x, y, z per p, q, r, l' equazioni continuino ad esser vere, egualmente che i loro differenziali: dovremo dunque avere $y = a + bx$, $z = c + ex$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = b$, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = e$. Queste equazioni ci daranno

$$a = y - \left(\frac{dy}{dx}\right)x, \quad c = z - \left(\frac{dz}{dx}\right)x,$$

e per conseguenza l' equazioni della retta tangente di una curva a doppia curvatura saranno

$$q = y - \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \left(\frac{dy}{dx}\right) p,$$

$$r = z - \left(\frac{dz}{dx}\right) x + \left(\frac{dz}{dx}\right) p,$$

ove p, q, r sono le coordinate dei suoi punti; x, y, z sono quelle della curva a doppia curvatura nel punto ove è il contatto con la curva. Queste due equazioni poi sono quelle stesse che troverebbersi per determinare le tangenti alle due curve piane, projezioni della curva a doppia curvatura: così a condurre una tangente ad una curva a doppia curvatura, basta condurre le tangenti alle di lei projezioni, essendo siffatte tangenti le projezioni stesse della tangente della curva a doppia curvatura, come si è detto anco qui sopra.

§ 111. Vogliasi ora il circolo osculatore di una curva a doppia curvatura. Risguardando un circolo nello spazio come nato dall'intersecazione di una sfera e di un piano che passi pel centro di lei, sarà esso rappresentato dal complesso dell'equazioni di queste due superficie.

L'equazione di una sfera paragonata a tre assi ortogonali, ed indicate le di lei coordinate con p, q, r, è $(p-a)^2 + (q-b)^2 + (r-c)^2 = h^2$, ove a, b, c sono le coordinate del centro, ed h il suo raggio. L'equazione di un piano paragonato anch' esso agli stessi assi, e che passa per un punto corrispondente alle coordinate a, b, c, è, generalmente parlando,

$$p - a + m(q-b) + n(r-c) = 0;$$

ove m, n sono due costanti arbitrarie, le quali determinano l' inclinazione del piano rispetto ai piani fissi delle coordinate. Il complesso pertanto di queste due equazioni rappresenterà un circolo col raggio h, il cui centro sarà in un punto dello spazio determinato dalle coordinate a, b, c, ed il cui piano dipenderà dalle quantità m ed n.

Onde questo circolo abbia una intersecazione con una curva a doppia curvatura in un punto di essa, corrispondente alle coordinate x, y, z, bisognerà che quelle due equazioni siano sempre vere, quando vi si pone x, y, z in vece di p, q, r: che sia cioè

$$(1) \ldots\ldots (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = h^2;$$

$$(2) \ldots\ldots x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0;$$

onde in quel punto siavi un contatto di primo ordine, dovranno ancora verificarsi queste altre due

$$(3) \ldots\ldots (x-a) + \left(\frac{dy}{dx}\right)(y-b) + \left(\frac{dz}{dx}\right)(z-c) = 0;$$

$$(4) \ldots\ldots 1 + m\left(\frac{dy}{dx}\right) + n\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Perchè poi il contatto sia del second' ordine, anche le due seguenti equazioni dovranno stare con le superiori

$$(5) \ldots\ldots 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)(y-b) + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(z-c) = 0$$

$$(6) \ldots\ldots m\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + n\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0.$$

Ora essendo sei i parametri indeterminati i quali entrano nell' equazioni del circolo, potremo determinarli per modo che siano soddisfatte queste sei equazioni: potremo dunque trovare sempre un circolo che sia osculatore di una curva a doppia curvatura qualunque, e sarà questo determinato di posizione e di grandezza. Se volessimo che il circolo fosse soltanto tangente, non avremmo a soddisfare che a quattro equazioni; ci resterebbero in conseguenza due indeterminate, e potremmo prendere per tali il raggio h, ed una delle due m, n.

Allora l' equazione

$$(x-a) + \left(\frac{dy}{dx}\right)(y-b) + \left(\frac{dz}{dx}\right)(z-c) = 0$$

rappresenterebbe il piano ove si troverebbero i centri, e perciò anco i raggi dei circoli che possono esser tangenti: siccome poi il raggio di un qualunque circolo tangente è necessariamente perpendicolare alla curva; così questa equazione sarebbe quella di un piano perpendicolare alla curva medesima, prendendo a, b, c per coordinate del piano stesso.

§ 112. Siano $y = f(x)$, $z = \phi(x)$ le due equazioni di una curva a doppia curvatura, che chiamo la *toccata*. Siano

$q = F(p, a, b, c, \text{ecc.})$, $r = \psi(p, a, b, c, \text{ecc.})$

quelle della curva toccante, e siano a, b, c, ecc. i parametri da determinarsi.

A tenore di ciò che abbiamo detto (§ 107), soddisfacendo alle due equazioni

(1) .... $f(x) = F(x)$, (2) .... $\phi(x) = \psi(x)$,

si ha un' intersecazione delle due curve a doppia curvatura, e per soddirfarvi conviene determinare due parametri della toccante. Soddisfacendo inoltre a quest' altre due

$$(3) \ldots \left(\frac{df}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right), \quad (4) \ldots \left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \left(\frac{d\psi}{dx}\right),$$

col determinare due altri parametri, si ha un contatto del primo ordine: rendendo anco soddisfatte, col determinare due nuovi parametri, quest' equazioni

$$(5) \ldots \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right), \quad (6) \ldots \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right),$$

si ha un contatto del secondo ordine, e così di mano in mano.

Dunque ad avere un contatto di un ordine qualunque fa di bisogno aver sempre un numero pari di equazioni soddisfatte, e che queste siano del tenore di quelle qui riportate, e tante di numero, quanto è il doppio dell' ordine del contatto, aumentato questo doppio di due. Dunque per rendere una

curva a doppia curvatura, toccante di un' altra con un contatto di un certo ordine, converrà che essa abbia un numero pari di parametri indeterminati, e tanti quante sono quelle equazioni, e così disposti, che determinandoli si possa a tutte le dette equazioni soddisfare. Così pel contatto di secondo ordine è necessario che i parametri siano sei, e che in una delle due equazioni le quali rappresentano la toccante, non si ritrovino soltanto due di questi parametri che non siano nell' altra equazione. Se i parametri fossero cinque, allora la toccante non potrebbe avere con la toccata un *assoluto* contatto del secondo ordine: potrebbero però avere un contatto del secondo ordine *relativo* ad una projezione, ed un contatto del primo *relativo* ad un' altra projezione. Se poi quattro parametri si trovassero nell'una equazione, e due nell' altra, essa allora, la toccante, potrebbe avere un contatto del primo *relativo* all' altra projezione; e generalmente parlando dipenderà dal nostro arbitrio il determinare i parametri in guisa che la toccante rispetto ad una projezione abbia un certo ordine di contatto, ed un altro ne abbia rispetto all' altra projezione; ciò che è indubitato si è che dal numero dei parametri indeterminati tosto si ricava il numero dell' equazioni cui col mezzo dei medesimi potremo soddisfare. Basti di aver accennate queste cose.

CAPO XII.

Dei contatti delle superficie.

§ 113. Siano x, y, z le tre coordinate di una data superficie, e p, q, r le coordinate relative ai medesimi assi rettangolari di un piano che vuolsi con essa paragonare. Sia $z = f(x, y)$ l' equazione della superficie, ed $r = a + bp + cq$ quella del piano, a, b, c essendo le tre costanti che ne determinano la posizione. Onde il piano abbia con la

superficie un punto comune, bisogna che la di lui equazione si conservi vera, quand' anco in vece delle coordinate p, q, r vi si pongano x, y, z. Avremo dunque questa equazione

$$z = a + bx + cy.$$

Consideriamo frattanto un altro punto corrispondente alle coordinate $x + \omega$, $y + \theta$. Per questo nuovo punto l' ordinata z diventerà $f(x + \omega, y + \theta)$, e l' ordinata perpendicolare r del piano sarà
$= a + b(x + \omega) + c(y + \omega)$: la distanza poi dei due punti corrispondenti della superficie e del piano, la quale noi indicheremo con D, sarà

$$D = f(x + \omega, y + \theta) - a - b(x + \omega) - c(y + \theta).$$

Sviluppiamo la funzione $f(x + \omega, y + \theta)$ in una serie ordinata a seconda delle potenze e dei prodotti degli aumenti indeterminati ω, θ (§ 43), e fermandoci ai termini ove trovansi le potenze seconde, tenendo conto dei resti, avremo

$$\begin{aligned} D = f(x, y) &+ \omega f'(x, y) + \frac{\omega^2}{2} f''(x + p', y + q') \\ - a \quad &+ \theta f_{,}(x, y) + \omega\theta f'_{,}(x + p', y + q') \\ - bx \quad &- \omega b \quad + \frac{\theta^2}{2} f_{,,}(x + p', y + q') \\ - cy \quad &- \theta c \end{aligned}$$

ove $f'(x, y)$ indica il differenziale parziale primo di $f(x, y)$ rispetto alla x; $f_{,}(x, y)$ quello rispetto alla y; $f''(x + p', y + q')$ il differenziale parziale secondo preso due volte rispetto all'x; $f'_{,}(x + p', y + q')$ quello preso prima rispetto all' x, poi rispetto alla y; $f_{,,}(x + p', y + q')$ quello preso due volte rispetto all' y, avendo in questi tre ultimi differenziali posto $x + p'$ in vece dell' x, e $y + q'$ in vece dell' y. Le quantità p', q' sono tali che la prima è contenuta tra o ed ω, e la seconda tra o e θ.

Ora essendo

$f(x, y) = z = a + bx + cy$, avremo

$$D = \omega \left\{ \left(\frac{dz}{dx}\right) - b \right\} + \theta \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right) - c \right\}$$
$$+ \omega^2 P + \omega\theta Q + \theta^2 R,$$

scrivendo per brevità P, Q, R in vece dei coefficienti delle seconde dimensioni degli aumenti ω, θ.

Se noi diamo una tal posizione al piano, che sia

$b = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $c = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, allora sarà

$$D = \omega^2 P + \omega\theta Q + \theta^2 R.$$

Un piano che gode di queste proprietà, chiamasi *tangente* della superficie curva nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z. L'equazione di questo piano è dunque

$$r = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)p + \left(\frac{dz}{dy}\right)q.$$

Ora si può dimostrare che nessun altro piano può esser tangente della superficie nello stesso punto, e passare tra il piano e la superficie medesima. In fatti un altro piano non può passare tra la superficie curva ed il primo, se la distanza Δ tra due punti di esso e della superficie, corrispondenti alle coordinate $x + \omega$, $y + \theta$, non è minore di D.

Prendendo l'equazione di un altro piano

$r = \alpha + \beta p + \gamma q$, avremo

$$\Delta = \omega \left\{ \left(\frac{dz}{dx}\right) - \beta \right\} + \theta \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right) - \gamma \right\}$$
$$+ \omega^2 P + \omega\theta Q + \theta^2 R.$$

La quantità D contiene soltanto le potenze seconde degli aumenti indeterminati ω, θ; la Δ contiene anche le prime: potremo dunque prendere ω, θ così piccoli, che questa distanza Δ superi la D, non computati i segni; dunque sarà impossibile che quel nuovo piano possa passare tra la superficie

ed il primo, di cui l'equazione è $r = a + bq + cq$; e se vorremo annullare in Δ i termini delle prime potenze di ω, θ, converrà fare $\beta = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\gamma = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, quindi il nuovo piano si confonderà coll'altro.

§ 114. Per rendere generale questa dottrina, sia $z = f(x, y)$ l'equazione di una qualunque superficie; sia $r = F(p, q)$ quella di una superficie data, ed esaminiamo le condizioni, onde queste abbiano un punto comune tra loro. Primieramente dovrà essere $z = F(x, y)$, ovvero $f(x, y) = F(x, y)$.

Poniamo ora $x + \omega$, $y + \theta$ in vece di x, y: l'ordinata della prima superficie curva sarà $f(x+\omega, y+\theta)$ e quella della seconda $F(x+\omega, y+\theta)$; la distanza poi dei due punti corrispondenti in queste due superficie, punti che trovansi sopra la medesima ordinata, sarà

$$D = f(x+\omega, y+\theta) - F(x+\omega, y+\theta).$$

Sviluppiamo queste due funzioni in serie, e fermandoci ai termini ove le potenze degli aumenti ω, θ sono le seconde, avremo

$$D = \omega\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\right\} + \theta\left\{\left(\frac{dz}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\omega^2}{2}\left\{f''(x+p', y+q') - F''(x+p', y+q')\right\}$$
$$+ \omega\theta\left\{f'_{,}(x+p', y+q') - F'_{,}(x+p', y+q')\right\}$$
$$+ \frac{\theta^2}{2}\left\{f_{,,}(x+p', y+q') - F_{,,}(x+p', y+q')\right\},$$

ove p', q' sono contenute tra i limiti o e ω, o e θ.

Supponiamo che i termini moltiplicati per ω e per θ disparischino, il che avviene facendo $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{dy}\right)$, e l'espressione di D non conterrà allora le potenze lineari di ω e θ.

Quando le due superficie sono tali che si verificano queste condizioni, si chiamano tangenti l'una dell' altra; così perchè una superficie curva rappresentata coll' equazione $r = F(p, q)$ sia tangente di un' altra rappresentata coll' equazione $z = f(x, y)$, e lo sia nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z, converrà che l' equazione $r = F(p, q)$ si mantenga vera, allorchè in essa pongonsi quelle coordinate x, y, z in vece delle p, q, r; e che parimente si conservino tali, in quell' ipotesi, le due differenziali parziali del primo ordine della stessa equazione $r = F(p, q)$; bisognerà, cioè, che siano verificate queste tre equazioni

$$z = F(x, y); \left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right); \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{dy}\right).$$

Tale è la proprietà analitica di una superficie tangente di un' altra.

La proprietà poi geometrica è che nessun' altra superficie data da un' altra equazione $s = \phi(t, v)$ può passare tra quella prima superficie e la sua tangente, se non è anche per essa

$$z = \phi(x, y), \left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d\phi}{dx}\right), \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\phi}{dy}\right),$$

vale a dire, se non gode ancora essa della medesima proprietà analitica dell' altra.

Ciò si dimostra collo stesso discorso da noi fatto pel piano tangente.

Quando adunque nella superficie data $s = F(p, q)$ si avranno tre parametri a, b, c da determinarsi, noi li potremo determinare in maniera che restino soddisfatte queste tre equazioni

$$z = F(x, y); \left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dF}{dx}\right); \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{dy}\right),$$

ed allora la superficie data sarà tangente di quella $z = f(x, y)$ nel punto corrispondente alle coordinate x, y.

Le tre equazioni precedenti sono la stessa equazione della superficie data, e le due differenziali parziali della medesima, nelle quali si cangiano p, q, r in x, y, z. In generale dunque rappresentando con $F(p, q, r) = 0$ l'equazione di una superficie data, e con z, y, x le coordinate di una altra superficie proposta che debb' essere toccata dalla prima nel punto corrispondente a quelle coordinate, dovranno essere verificate queste tre equazioni

$$F(x, y, z) = 0, \left(\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$ ciò che ci somministrerà i valori dei tre parametri a, b, c, dati col mezzo delle quantità x, y, z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

§ 115. Estendiamo lo sviluppo delle funzioni, la cui differenza eguaglia la distanza D sino ai termini delle terze dimensioni degli aumenti ω, θ, e supponendo che i coefficienti delle prime dimensioni si annullino, avremo

$$D = \frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\right\} + \omega\theta\left\{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) - \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\theta^2}{2}\left\{\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\right\} + \omega^3P + \omega^2\theta Q + \omega\theta^2R + \theta^3S,$$

ove P, Q, ecc. rappresentano i coefficienti delle terze dimensioni che sonosi trovati al § 43.

Se dunque l'equazione $r = F(p, q)$ della superficie è tale che, oltre all'esser verificate quelle tre equazioni, si possano anco verificare queste altre tre,

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) = \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right), \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2F}{dy^2}\right),$$

i termini del secondo ordine dispariranno dal valore del D, e proveremo facilmente che si potranno sempre dare ad ω e θ dei valori così piccoli che la distanza D sia minore di una simile distanza Δ appartenente a qualunque altra superficie data, la quale non soddisfaccia alle stesse condizioni. Sarà dunque impossibile che questa superficie passi tra le superficie competenti all' equazioni $r=F(p,q)$, $z=f(x,y)$, dopo avere avuto con esse lo stesso punto comune.

In questo caso la superficie spettante all' equazione $r=F(p,q)$ ha un contatto che dicesi *di secondo ordine* con la superficie spettante all' equazione $z=f(x,y)$, ed ha il nome di superficie *osculatrice*.

Si può continuare lo stesso discorso per l' annullamento degli altri termini nel valore del D.

Generalmente parlando, se rappresentiamo con $F(p,q,r)=0$ l' equazione della superficie data, onde questa abbia un contatto di secondo ordine con una superficie qualunque rappresentata con $z=f(x,y)$ nel punto corrispondente alle coordinate x, y, dovremo soddisfare a sei equazioni, cioè alla $F(x,y,z)=0$, alle due di lei differenziali parziali del primo ordine, ed alle tre di lei differenziali parziali del secondo: fa perciò di bisogno ch' essa contenga sei parametri indeterminati, onde possano determinarsi in modo da soddisfare a quelle equazioni.

Perchè la superficie data avesse un contatto di terzo ordine converrebbe che contenesse dieci parametri indeterminati, e che si determinassero in maniera da soddisfare a dieci equazioni, cioè alle sei qui sopra annoverate, ed alle quattro differenziali parziali del terzo ordine della $F(x,y,z)=0$; e così via via.

§ 116. Paragoniamo la superficie di una sfera con una superficie qualunque.

L' equazione della sfera
$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2-h^2=0$ contiene quattro parametri a, b, c, h, dei quali a, b, c danno la posizione del centro, h la grandezza del raggio.

Essa dunque può avere con una curva qualunque un contatto del primo ordine, determinandone tre opportunamente.

Secondo quanto abbiamo detto al § antecedente, poniamo nell' equazione della sfera x, y, z in vece di p, q, r, ed avremo
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-h^2=0$,
le di cui differenziali del primo ordine sono

$$x-a+\left(\frac{dz}{dx}\right)(z-c)=0,$$

$$y-b+\left(\frac{dz}{dy}\right)(z-c)=0:$$

se noi determiniamo le tre costanti a, b, c col mezzo di queste tre equazioni, avremo

$$a=x+\frac{h\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}},$$

$$b=y+\frac{h\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}},$$

$$c=z+\frac{h}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}},$$

ed il raggio h rimane arbitrario.

Si può dunque sempre avere una sfera di qualsisia raggio, tangente di una qualunque superficie. Quel raggio sarà perpendicolare alla stessa superficie, di modo che risguardando questo raggio come indeterminato, le tre quantità a, b, c saranno le coordinate della perpendicolare alla superficie medesima nel punto corrispondente alle coordinate x, y, z. L' equazioni poi di questa perpendicolare saranno

$$a-x+(c-z)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$b-y+(c-z)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

Onde la sfera divenisse osculatrice, dovremmo soddisfare ad altre tre equazioni, cioè alle differenziali parziali del second' ordine dell' equazione della sfera, pel che ci abbisognerebbero altri tre parametri da determinarsi, e non ne abbiamo che il solo raggio h. È dunque impossibile di trovare in generale una sfera osculatrice di una superficie.

Se in vece di una sfera noi prendessimo a considerare la superficie formata dalla rotazione di un arco di circolo attorno della sua corda, siccome allora nell' equazione di questa superficie si troverebbero sei costanti arbitrarie, così si avrebbero allora gli elementi necessarj onde far sì che siffatta superficie fosse osculatrice di una superficie qualunque.

§ 117. Non essendo possibile ritrovare tra tutte le sfere tangenti di una superficie una sfera che ne sia osculatrice, limitiamoci a determinare quella sfera che sarà osculatrice di una curva qualunque disegnata sopra la medesima superficie. Basterà in questo caso che noi supponiamo la y funzione dell' x, come nelle curve a doppia curvatura, e prendiamo in questa supposizione l' equazioni differenziali prima e seconda dell' equazione della sfera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=h^2.$$

Il differenziale primo è

$$x-a+\left(\frac{dy}{dx}\right)(y-b)+\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}(z-c)=0$$

ed il secondo è

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)(y-b)+\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^2$$
$$+\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}\times(z-c)=0:$$

si avverta che nel differenziare abbiamo considerato z funzione dell' x e dell' y, mentre y è anche essa funzione dell' x; così il differenziale della z, rispetto all' x e diviso per dx, è

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Il differenziale primo è soddisfatto da che sono soddisfatti i due differenziali parziali del primo ordine

$$x-a+\left(\frac{dz}{dx}\right)(z-c)=0,\quad y-b+\left(\frac{dz}{dy}\right)(z-c)=0,$$

e solo ci resta da soddisfare al differenziale secondo, il quale essendo

$y-b+\left(\frac{dz}{dy}\right)(z-c)=0$, si riduce a questo

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right\}^2+\left\{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}(z-c)=0:$$

se ora sostituiamo in quest' ultima equazione il valore di c, e ne ricaviamo quindi il valore di h, avremo

$$h=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^2\right\}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{d^2y}\right)}.$$

In questa guisa conosceremo il raggio della sfera tangente della superficie curva e nel tempo stesso osculatrice di una curva disegnata sopra quella superficie. Determinato poi il raggio, saranno determinate in conseguenza anche le coordinate a, b, c del centro col mezzo delle formole trovate sopra.

CAPO XIII.

Dei punti singolari delle curve.

§ 118. Chiamansi *punti singolari* di una curva quei punti nei quali la curva ha qualche proprietà che non è comune a tutti gli altri di lei punti. Parleremo di quei per ritrovare i quali fa d' uopo il calcolo differenziale.

Sonovi talvolta nelle curve dei punti ove l' ordinata è la maggiore o la minore di quelle che la precedono o che la seguono. Si chiamano questi *punti dell' ordinata massima* o *dell' ordinata minima*, o semplicemente *massimi* o *minimi*. La figura 9 presenta una curva la quale ha due massimi ed un minimo. I massimi sono in M, M''; il minimo è in M'.

Un' occhiata che diasi alla figura, ci persuaderà facilmente che nei punti del massimo o del minimo le tangenti esser debbono parallele all' asse, e che nel massimo la curva volta all' asse la concavità, e nel minimo la convessità.

Dovendo pertanto la tangente della curva esser parallela all' asse, ne viene di conseguenza che l' angolo fatto da questa stessa tangente coll' asse sarà nullo, e che quindi anco nulla sarà la tangente trigonometrica di quest' angolo; ma una tale tangente

è rappresentata da $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, dunque nel punto massimo o minimo sarà $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$; dunque a trovare i massimi o minimi di una curva, è necessario eguagliare a zero il differenziale della di lei ordinata diviso per dx, ed allora tutt' i valori dell' x, vale a dire, tutte le radici reali di quell' equazione ci daranno tante ascisse alle quali corrisponderanno altrettante ordinate massime o minime.

§ 119. Ma come distinguere il *massimo* dal *minimo?* Se noi facciamo nell' espressioni delle coordinate a e b (§ 82), le quali determinano il luogo del centro del circolo osculatore, $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$, avremo $a=x$, $b=y+1:\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$; e di qui si ricava che se $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ è una quantità positiva, questo centro cadrà al di là della curva la quale sarà perciò convessa verso l' asse, ed avrà un *minimo*; e se $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ è una quantità negativa, lo stesso centro cadrà tra la curva e l' asse; essa allora volterà all' asse la concavità, ed in quel luogo avrà un *massimo*.

Ma senza far che questi *massimi* e *minimi* dipendano dalla teorica della tangente, noi osserveremo che le ordinate altro non sono che quelle funzioni capaci di divenire *massime* o *minime*, delle quali noi abbiamo diffusamente parlato nel cap. VI; per questo non parleremo ulteriormente dei *massimi* e *minimi* delle curve, ed altro non faremo che darne alcuni esempj.

§ 120. Vogliasi il massimo o il minimo della curva denominata *concoide di Nicomede*. Preso per asse delle

ascisse la stessa *direttrice* della concoide, l'equazione della concoide superiore è $xy = (b + y)\sqrt{(a^2 - y^2)}$. Ora dal differenziale di questa equazione si ha $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{y\sqrt{(a^2 - y^2)}}{a^2 - by - 2y^2 - x\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, e quindi egnagliando a zero questo valore del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si trova $y = 0$, $y = a$; l'equazione poi della curva ci dà, quando $y = 0$, $x = \infty$, quando $y = a$, $x = 0$. Prendendo ora il differenziale secondo del $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, si vedrà che $y = 0$ non ci dà nè massimo nè minimo, mentre $y = a$, ovvero $x = 0$, ci dà un massimo. L'equazione $y = (1 - x)\ tang.\ cx$ è quella della curva chiamata *quadratrice di Dinostrato*, avendo però fatto eguale all'unità il raggio del di lei circolo genitore, e rappresentando con c un arco di 90°. L'asse dell'ascisse è lo stesso diametro del circolo, e l'origine è alla di lui estremità. Si cerchi se in questa curva vi sono *massimi* o *minimi*. Abbiamo in questo caso $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -tang\ cx + (1 - x)\frac{c}{\overline{cos\ cx}^2}$, e perciò $c(1 - x) - sen\ cx \cdot cos\ cx = 0$, e quindi $x = 1$. All'ascissa dunque $x = 1$ compete un massimo o un minimo.

Per sapere qual è dei due, osservo che

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{c}{(cos\ cx)^2} - \frac{c}{(cos\ cx)^2} + \frac{2(1 - x)c^2 \cdot sen\ cx}{(cos\ cx)^3} = -\infty$$

quando $x = 1$; dunque è un massimo.

§ 121. Per ultimo io prendo un caso che appartiene veramente alle superficie e non alle curve, e ciò per mostrare che anco nelle superficie sono quei punti i quali chiamansi *massimi* o *minimi*.

Supponendo una sfera riferita a tre piani perpendicolari tra loro, col mezzo delle coordinate rettangole x, y, z, si cerchi ove si troverà la *massima* ordinata z.

L'equazione della sfera è $(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=r^2$, essendo a, b, c le coordinate del centro, ed r il suo raggio: differenziandola adunque rispetto all' x e rispetto all' y, avremo

$$-(a-x)-(c-z)\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,$$

$$-(b-y)-(c-z)\left(\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

dalle quali otteniamo

$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{a-x}{c-z}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{b-y}{c-z}$: ora facendo $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$, come ci prescrive la regola data al § 60, otterremo $a-x=0$, $b-y=0$, e quindi $x=a$, $y=b$: dunque la *massima* o la *minima* ordinata della sfera sarà quella che passa pel centro di essa.

Il valore di questa *massima* o *minima* ordinata ci è dato dall' equazione della curva, facendovi $x=a$, $y=b$; abbiamo in fatti $(c-z)^2=r^2$, ovvero $c-z=\pm r$, e quindi $z=c+r$, $z=c-r$: corrisponde dunque allo stesso punto del piano un *massimo* ed un *minimo*; $z=c+r$ è il *massimo*, $z=c-r$ è il *minimo*.

Questa medesima conseguenza si ricava dai criterj dati al § 60: ivi abbiamo detto che z sarà *massima* quando $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ avranno un valor negativo, e *minima* quando lo avranno positivo, purchè nei due casi sia $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)>\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$: ora

differenziando le ritrovate equazioni, si ha

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{1}{c-z},\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\frac{1}{c-z},\ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=0,$$

nelle quali ponendo in vece della z il suo primo valore, otteniamo $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-\frac{1}{r}=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, e ponendovi il secondo, otteniamo $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{1}{r}=\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$; dunque $z=c+r$ è veramente la *massima* ordinata, e $z=c-r$ la *minima*.

§ 122. Quando una linea curva EF (*Fig.* 10) paragonata all' asse AB, di concava come essa è in EH, diviene convessa come in HF o *vice versa*, continuando il suo cammino dalla stessa parte, il punto H, ove segue quel cangiamento, chiamasi punto di *flesso contrario*, o semplicemente *flesso*; e se nel passare alla convessità torna indietro ripiegandosi sopra sè medesima, il punto H si chiama allora *regresso* (*Fig.* 11).

Tanto nell'uno quanto nell' altro caso, preso un raggio osculatore $M'C'$ nella parte convessa HF della curva, e presone uno MC nella parte concava EH, l' ordinata del punto del contatto M' pel primo raggio è minore dell' ordinata del di lui centro C', cioè $M'P' < C'p'$; e *vice versa* l' ordinata del punto del contatto M per l' altro raggio è maggiore dell' ordinata del respettivo suo centro C, cioè $MP > Cp$.

Incominciamo dal considerare il flesso, ed indicando con y_x l' ordinata che corrisponde al punto di flesso, mentre x ne è ascissa, facciamo $RP=\omega$, $RP'=\omega'$; avremo così $y_{x-\omega}=MP$, $y_{x+\omega'}=M'P'$. Supponiamo $'y=y_{x-\omega}$, $y'=y_{x+\omega'}$, e s'avrà (§82)

$$Cp='y+\left\{1+\left(\frac{d'y}{dx}\right)^2\right\}:\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right)$$

$$C'p'=y'+\left\{1+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right\}:\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right):$$

acciò dunque la curva abbia un punto di flesso, converrà che le due quantità $\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)$ siano di segno contrario. Sviluppiamo in serie queste quantità, terminando la serie al terzo termine, ed avremo

$$\left(\frac{d^2{}'y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\omega\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\frac{\omega^2}{2}L$$

$$\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\omega'\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+\frac{\omega^2{}'}{2}N.$$

Ora un raziocinio simile a quello fatto pei *massimi* ed i *minimi* (cap. VI) ci dimostra che non possono quelle quantità essere di segno contrario per tutt' i valori possibili di ω, se non è $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$; dunque il flesso contrario d' una curva sarà in quel punto nel quale $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$: dunque data l' equazione d' una curva, troveremo l' ascissa corrispondente al flesso, eguagliando a zero il differenziale secondo della di lei ordinata, e cercando le radici reali, cioè i valori dell' x che soddisfanno ad una tale equazione.

Se la supposizione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ annullerà anche $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, non vi sarà flesso, quando non rimanesse ancora annullato $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$; e se annullata quest' ultima quantità, s' annullerà $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)$ senza che accada lo stesso della $\left(\frac{d^6y}{dx^6}\right)$, non vi sarà flesso, e così via via.

Generalmente parlando, per avere un punto di flesso bisogna che nella serie

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right), \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right), \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right), \left(\frac{d^6y}{dx^6}\right), \text{ecc.},$$

l' ultimo termine che s' annulla, sia un differenziale d' ordine pari.

Combinando dunque ciò che abbiamo detto (§ 58), concluderemo che se una curva ha dei *massimi* o dei *minimi*, corrisponderanno essi a quei punti nei quali i differenziali degli ordini impari dell' ordinata s' annullano, e se ha punti di flesso, in questi s' annulleranno i differenziali degli ordini pari. Siccome poi la curva EH (*Fig.* 10) è concava quando $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ è negativo, ed è convessa nel caso opposto; così quando essa abbia un punto di flesso, passerà dalla concavità alla convessità se $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ sarà positivo, e seguirà l' opposto quando $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ negativo, posto che il flesso ci sia dato dall'equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$; se poi l' equazione $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 0$ sarà quella che ci darà il flesso, allora la curva sarà prima concava o convessa secondo che $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)$ sarà positivo o negativo.

§ 123. Per determinare il regresso, risguardiamo le ascisse e le coordinate come funzioni degli archi cui competono. Siano dunque y_s, x_s (*Fig.* 11) l' ordinata e l'ascissa del regresso, essendo s l' arco corrispondente EH. Facciamo $MH = \omega$, $HM' = \omega'$, ed avremo

$'y = MP = y_{s-\omega}$, $y' = M'P' = y_{s+\omega'}$. Ora risguardando y ed x come due funzioni della s, le quantità $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ saranno egualmente funzioni di s: indichiamole con $\phi(s)$, $F(s)$, e sarà

$Cp = 'y + \{1 + \phi^2(s-\omega)\} : F(s-\omega)$

$Cp' = y' + \{1 + \phi^2(s+\omega')\} : F(s+\omega')$.

Acciò dunque la curva abbia un punto di regresso, converrà che le due quantità $F(s-\omega)$, $F(s+\omega')$ siano di segni contrarj, giacchè $1+\phi^2(s-\omega)$, $1+\phi^2(s+\omega')$ sono sempre del medesimo segno: ora affinchè questo succeda, è necessario che sia $F(s) = 0$; dunque $F(s) = 0$, ovvero $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ sarà un' equazione la quale dovrà esser vera nel punto di regresso, ed il valore dell' x che ci sarà dato da quest' equazione, sarà l' ascissa corrispondente al regresso: di qui si vede che la medesima equazione che ci dà il flesso, può darci ancora il regresso.

Affinchè in una curva si abbia un punto di flesso o regresso, abbiam dimostrato che le due quantità $\left(\frac{d^{2\prime}y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)$ debbono essere di segni contrarj. Lo stesso avremmo potuto dimostrare delle quantità $\frac{1}{\left(\frac{d^{2\prime}y}{dx^2}\right)}$, $\frac{1}{\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)}$: ora rappresentando in generale con $\frac{P}{Q}$ il valore di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, con $\frac{'P}{'Q}$ quello di $\left(\frac{d^{2\prime}y}{dx^2}\right)$, e con $\frac{P'}{Q'}$ quello di $\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)$, acciocchè in

una curva siavi il flesso o regresso corrispondente alle coordinate x, y, dovranno le quantità $\frac{'P}{'Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, ovvero $\frac{'Q}{'P}$, $\frac{Q'}{P'}$ essere di segni contrarj, ed affinchè ciò succeda dovrà essere $\frac{P}{Q} = 0$, ovvero $\frac{Q}{P} = 0$.

Quest' ultima equazione ci dà $\frac{P}{Q} = \frac{1}{\frac{P}{Q}} = \frac{1}{0} = \infty$; dunque il flesso o il regresso ci è dato dall' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, e dall' equazione $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \infty$; di modo che si proveranno ambedue l' equazioni $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \infty$, onde avere tutti i punti di flesso o di regresso che possono trovarsi in una curva.

Non vi è una regola generale per distinguere se un ritrovato punto sia veramente un flesso od un regresso, e ciò che ne hanno detto finora gli autori, è a mio parere poco esatto.

Solo si può, ottenuta l' ascissa competente al flesso od al regresso, esaminare in qualche modo il corso della curva al di qua ed al di là di questo punto; ciò potremo fare assegnando diversi valori all' ascisse, e determinando in questa guisa diversi punti pei quali dovrà passare la curva medesima.

§ 124. Per quanto non si possa determinare la direzione d' una curva in un qualunque suo punto, poichè essa varia continuamente, pure per direzione d' una curva in un certo di lei punto s' intende comunemente la direzione che vi ha la tangente; così il problema che dimanda la determinazione di quella direzione nel luogo corrispondente ad una

ascissa $x = a$, è risoluto quando si assegni la posizione della tangente alla curva in quel luogo medesimo.

Ottenuto adunque, mercè la differenziazione, il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ che sarà in generale una funzione dell' x e dell' y, e ridotto ad essere una sola funzione dell' x (col sostituire ad y il suo valore datoci dall' equazione della curva), porremo in esso $x = a$, ed avremo allora la direzione della tangente alla curva nel punto corrispondente ad $x = a$, ed in conseguenza la direzione della curva in quel punto medesimo.

Se questa supposizione $x = a$ renderà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{0}{0}$, allora cercandone il valore, come abbiamo insegnato al § 53, avremo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dato da un' equazione di secondo grado, ed in conseguenza otterremo due valori per esso. Vi saranno allora nel punto corrispondente all' ascissa $x = a$ due tangenti, e vi passeranno in conseguenza due rami di curva: nello stesso modo se la nuova espressione trovata per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ci sarà data da un' equazione del terzo grado, avremo allora tre valori per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ed in conseguenza tre tangenti nel punto dato, per cui passeranno tre rami di curva, e così di seguito.

Vice versa, data l' equazione d' una curva, potremo facilmente determinare se essa ha dei punti multipli, e quali. Per far questo ricaveremo il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dall' equazione della curva, e supponendolo $= \frac{P}{Q}$, faremo $P = 0$, $Q = 0$: queste due

equazioni tra l' x e l' y ci daranno $x=a$, $y=b$, e se tali valori soddisfaranno all' equazione della curva, avrà essa un punto multiplo; e quando ciò non succederà, non vi sarà alcuno di questi punti.

Per decidere poi della moltiplicità del punto, osserveremo se $x=a$, $y=b$, i quali rendono $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{0}{0}$, riducono ancora indeterminato il nuovo valore che si ritrova per $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{P}{Q}$, e quando ciò non succederà, la curva avrà un punto doppio; lo avrà triplo se quei valori renderanno anche eguale a $\frac{0}{0}$ la nuova espressione trovata per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, e così via via.

Per farne un esempio, si dimandi se la curva, la cui equazione è $x^4 - ax^2y + by^3 = 0$, ha punti moltipli.

Dalla differenziazione di quest' equazione si ha

$$4x^3 - 2axy - (ax^2 - 3by^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ che ci dà}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{P}{Q} = \frac{4x^3 - 2axy}{ax^2 - 3by^2}, \text{ e quindi}$$

$$4x^3 - 2axy = 0, \ ax^2 - 3by^2 = 0.$$

Da queste due ultime equazioni si ricava $x=0$, $y=0$, e questi valori delle coordinate soddisfacendo alla proposta, ci dicono ch' essa ha un punto multiplo nell' origine delle coordinate.

Per trovare il grado di multiplicità del punto, differenziamo un' altra volta, ed avremo

$$12x^2 - 2ay - 4ax\left(\frac{dy}{dx}\right) - (ax^2 - 3by^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$+ 6by\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;$$ facendo $x=0$, $y=0$, sarà

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{0}{0}$, dal che si riconosce che il punto è triplo, o che passano dall' origine delle coordinate tre rami di curva. Il punto è triplo, perchè differenziando di nuovo il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, non diviene esso indeterminato per causa dei valori $x=0$, $y=0$.

CAPO XIV.

Della forza acceleratrice e della velocità nei moti variabili.

§ 125. Il calcolo differenziale si adopera non solo a trovare l' espressioni delle quantità geometriche, il che abbiamo veduto finora, ma anco delle meccaniche.

Ogni moto, parlando col linguaggio dell' algebra, consiste in un rapporto tra lo spazio ed il tempo: lo spazio è sempre una funzione del tempo, e parlando del moto rettilineo, se indichiamo con s e con t quelle due quantità, $s = f(t)$ sarà l' equazione che rappresenta algebraicamente tutti i moti possibili in linea retta. Si avranno adunque o potranno immaginarsi tanti moti differenti quante sono le differenti forme che dar possiamo alla funzione $f(t)$. Se facciamo $f(t) = at$, abbiamo $s = at$; e questa è l' equazione di un movimento nel quale gli spazj sono proporzionali ai tempi. A questo si dà il nome di *moto uniforme*, e quello si è col quale si moverebbe un corpo messo in moto da una forza momentanea, da una forza, cioè, che dopo avere per un solo momento operato su di lui, lo abbandona. La lettera a, la quale trovasi nell' equazione del moto uniforme, ne rappresenta la velocità.

Facciasi $f(t) = bt^2$, e l' equazione $s = bt^2$ ci rappresenta un altro moto, nel quale gli spazj sono

come i quadrati dei tempi, e cui si dà il nome di moto uniformemente *accelerato*: esso è prodotto da una forza la quale opera costantemente su di un corpo per metterlo in moto, e che continua il suo effetto con la medesima energia, anco nel tempo stesso nel quale quel corpo si muove. A questa forza si dà il nome di forza *accelerativa*, o più comunemente *acceleratrice*, la quale è costante in uno stesso moto, ma si cambia da un moto all' altro: essa è proporzionale al coefficiente b che trovasi nell' equazione $s = bt^2$. Con questo moto uniformemente accelerato si muovono i corpi liberamente cadenti per effetto della gravità.

Se in fine facciamo $f(t) = at + bt^2$, si avrà $s = at + bt^2$, e sarà questa l' equazione di un moto composto dei due moti mentovati superiormente. Con questo moto si muovono i corpi gettati verticalmente di giù in su, o di su in giù. In questo terzo moto i due moti che lo compongono, non s' impediscono l' un l' altro, e lo spazio descritto nel moto composto è sempre eguale alla differenza o somma dei due spazj che il corpo descriverebbe animato separatamente da quei due moti componenti uno per volta.

§ 126. Poste queste cose, prendiamo ad esaminare un moto qualunque rettilineo rappresentato dalla equazione $s = \phi(t)$. Alla fine del tempo t il mobile avrà corso lo spazio $\phi(t)$, ed alla fine del tempo $t + \omega$ egli avrà corso lo spazio $\phi(t + \omega)$; sarà dunque $\phi(t + \omega) - \phi(t)$ lo spazio percorso nel tempo ω, il quale comincia quando il tempo t finisce. Sviluppiamo in serie la funzione $\phi(t + \omega)$, ed avremo

$$\phi(t) + \omega\left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dt^3}\right) + \text{ecc.};$$

dunque lo spazio percorso nel tempo ω sarà rappresentato dalla formola

$$\omega\left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3\phi}{dt^3}\right) + \text{ecc.},$$

nella quale il tempo t passato avanti il principio del tempo ω è considerato costante per rispetto al moto che succede in questo stesso tempo ω; così il moto col quale questo spazio è percorso, è composto di moti particolari dei quali gli spazj corrispondenti al tempo ω sono

$$\omega\left(\frac{dp}{dt}\right),\ \omega^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right),\ \omega^3\cdot\frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{d^3p}{dt^3}\right)\ \text{ecc.}$$

Di questi moti particolari il primo è un moto uniforme, con una velocità misurata da $\left(\frac{dp}{dt}\right)$; il secondo è un moto uniformemente accelerato, dovuto ad una forza acceleratrice proporzionale a $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)$; rispetto poi agli altri moti, siccome essi non significano alcun moto semplice conosciuto, non sarà necessario considerarli particolarmente, e si vedrà che potremo tralasciare di considerarli nel determinare le qualità del moto al principio del tempo ω.

Nel tempo ω pertanto, il quale comincia quando t finisce, lo spazio descritto è

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)\omega+\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\frac{\omega^2}{2}+\left(\frac{d^3s}{dt^3}\right)\frac{\omega^3}{2\cdot3}+\text{ecc.}$$ Ora immaginiamo una velocità media V tale che il corpo velocitato da essa faccia con moto equabile ed uniforme nel tempo ω lo stesso spazio che ei faceva in virtù dei moti variati da cui è realmente animato.

Se io suppongo che sia v la velocità che ha il mobile alla fine del tempo t, l'espressione di V dovrà avere questa forma $V=v+\omega z$, essendo ωz una funzione di ω e di t, che si annulla quando $\omega=0$, giacchè allora dobbiamo avere $V=v$: sarà dunque

$$(v+\omega z)\,\omega=\omega\left(\frac{ds}{dt}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)+\frac{\omega^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^3s}{dt^3}\right)+\text{ec.};$$

ma quest' ultima equazione debb' esser vera per qualunque valore dell' indeterminata ω, ed è dimostrato nell' algebra cartesiana che ciò non può succedere se i coefficienti delle respettive potenze di ω non si annullano da sè stessi: dovrà dunque essere $v - \left(\frac{ds}{dt}\right) = 0$, e quindi $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$; dunque la velocità del mobile alla fine del tempo t sarà sempre rappresentata dalla funzione $\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

Nel modo stesso essendo la somma degli spazj descritti nel tempo ω, escluso $\left(\frac{ds}{dt}\right)\omega$, il quale è fatto con moto equabile ed uniforme,

$$\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) + \frac{\omega^3}{2\cdot 3}\left(\frac{d^3s}{dt^3}\right) + \text{ecc.};$$

se noi immaginiamo una forza acceleratrice media F, la quale nel suddetto tempo ω faccia correre al mobile con moto uniformemente accelerato uno spazio eguale a quella somma corsa con moti variati, e se noi supponiamo $F = f + \omega y$, essendo f la forza acceleratrice alla fine del tempo t, ed ωy una funzione di ω e di t, che si annulla quando $\omega = 0$, avremo l' equazione

$$\left\{f + \omega y\right\}\omega^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\frac{\omega^2}{2} + \left(\frac{d^3s}{dt^3}\right)\frac{\omega^3}{2\cdot 3} + \text{ecc.},$$

la quale dovendo esser vera per tutti i valori di ω, ci darà $f = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$: dunque in qualunque siasi moto variato la forza acceleratrice alla fine del tempo t è espressa da $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$, e quindi è proporzionale a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$.

Nel moto uniforme rappresentato dall' equazione $s = at$ si ha $\left(\frac{ds}{dt}\right) = a$, $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = 0$, in questo moto, cioè, il coefficiente a rappresenta la velocità, e la forza acceleratrice vi è nulla: nell' uniformemente accelerato $s = bt^2$ si ha $\left(\frac{ds}{dt}\right) = 2bt$, $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = 2b$, e così la velocità in un istante qualunque è proporzionale al tempo passato dopo il principio del moto ed il rapporto fra la velocità ed il tempo, esprime la forza acceleratrice, ed è doppio del rapporto tra lo spazio corso ed il quadrato del tempo.

§ 127. Consideriamo ora un movimento curvilineo qualunque, essendo la curva descritta *EMF* (*Fig.* 12) collocata in un piano *CAB*, e confrontata ai due assi rettangolari *AC*, *AB*, dei quali il primo sia quello degli y, ed il secondo quello degli x. Il corpo nel muoversi si troverà sempre in alcuno dei punti della curva *EF*, ed il punto *M*, nel quale in un certo istante il corpo è, dipenderà dal tempo pel quale è seguito il moto. La situazione adunque del punto *M* dipenderà dal tempo. Conduciamo le coordinate $MQ = x$, $MP = y$: la situazione del punto *M* (*Fig.* 12) è determinata da queste coordinate; esse dunque sono funzioni del tempo, e per questo ciascuna di esse può rappresentare uno spazio rettilineo descritto con un moto espresso dalla funzione del tempo, alla quale è eguale la stessa ordinata.

Sia dunque $x = f(t)$, $y = F(t)$; determinato t, sono subito determinate le coordinate *AP*, *AQ*, e per conseguenza il punto *M*, ove trovasi il mobile: ora supponiamo che, oltre il vero corpo che muovesi nella curva, vi sieno due corpi ideali dei quali uno si muova lungo l' asse *AB*, l' altro lungo l' asse *AC* con dei moti rappresentati respettivamente da quelle due equazioni $x = f(t)$, $y = F(t)$: è chiaro che i due punti dei due assi nei quali si troveranno quei due corpi alla fine del tempo t, determineranno il

punto della curva nel quale si trova il vero corpo, essendo sempre quei punti la projezione del punto M della curva; dunque un moto qualunque può naturalmente ridursi a due moti rettilinei sopra i due assi delle coordinate, e questi moti possono risguardarsi come descritti dai mobili che sono projezioni del vero mobile sopra i due assi medesimi; quindi è che gli stessi moti possono considerarsi come la projezione del vero moto: così potremo risguardare come conosciuto il moto nella linea EMF, quando saranno conosciuti i moti rettilinei nei due assi.

In fatti conosciute l'equazioni $x=f(t)$, $y=F(t)$, si ha per qualunque tempo t, il luogo M del mobile, ed eliminando t col mezzo di esse, abbiamo l'equazione della curva descritta.

Consideriamo adunque i due moti $x=f(t)$, $y=F(t)$ rettilinei come componenti il moto curvilineo nella curva EM; il mobile posto in M inclinerà a muoversi parallelamente all' asse AB col moto $x=f(t)$, e parallelamente all' asse AC col moto $y=f(t)$. Ora, a tenore di quanto si è detto sopra, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ rappresentano la velocità e la forza acceleratrice che si ritrova alla fine del tempo t nel moto $x=f(t)$; come pure $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ rappresentano le simili quantità pel moto $y=f(t)$: dunque il corpo posto in M inclina a muoversi, ed effettivamente nel primo istante alla fine del tempo t si muove nella direzione delle x con una velocità $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, e con una forza acceleratrice $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, ed in quella delle y con una velocità $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ e con una forza acceleratrice $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$.

Sappiamo poi dalla meccanica che un corpo animato da due moti uniformi, o da due moti uniformemente accelerati, secondo due direzioni perpendicolari tra loro, dei quali moti siano a, b le velocità o le forze acceleratrici, inclina a muoversi e si muove con una velocità o con una forza acceleratrice rappresentata da $\sqrt{(a^2+b^2)}$, e con una direzione la quale fa con le due direzioni dei moti componenti due angoli, che hanno per coseni $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$: dunque le due velocità $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ daranno la velocità composta $\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$, e le due forze acceleratrici comporranno la forza acceleratrice $\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2\right\}}$. La velocità composta, che indicheremo con u, farà con gli assi delle x e delle y due angoli, i coseni dei quali saranno $\left(\frac{dx}{dt}\right):u$; $\left(\frac{dy}{dt}\right):u$.

Rappresentiamo ora con s l'arco EM, ed essendo esso una funzione del tempo, avremo

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}},$$

e quindi $\left(\frac{ds}{dt}\right)=u$: sarà dunque $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ la velocità del mobile alla fine del tempo t; di più la direzione di questa velocità sarà la stessa di quella della tangente MT alla curva nel punto M: imperciocchè gli angoli TMm, TMn che la tangente MT fa con gli assi (§ 73) sono tali che

$$\cos.\ TMm=\frac{Mm}{MN}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

$cos. TMn = \left(\frac{dy}{dx}\right) : \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$; ponendo poi $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$ per $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, avremo

$$cos. TMm = \left(\frac{dx}{dt}\right) : \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$$

$$cos. TMn = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}};$$

questi due coseni sono gli stessi che quei degli angoli fatti dalla direzione della velocità composta cogli assi; dunque la direzione della velocità coinciderà con la tangente della curva; e di qui segue che se le cause le quali impediscono al movimento d'essere rettilineo, cessassero tutte ad un tratto, il corpo da quel momento continuerebbe il suo moto nella direzione della tangente e con una velocità eguale a $\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

§ 128. La formola generale della forza acceleratrice serve alla soluzione di qualunque problema proposto sul moto di un punto animato da quante si vogliono forze; quando poi si tratta del moto di masse, i punti delle quali sono animati da forze diverse, come per cagion d'esempio, del moto dei fluidi, allora abbisognano altre considerazioni per istabilire l'equazione fondamentale del problema; chè se poi tutti i punti della massa di un fluido dovessero, mercè delle circostanze del problema, avere la stessa celerità, allora la faccenda va come se si trattasse del moto di un sol punto. Io do un problema di quest'ultimo caso, onde vedano i lettori come uno si regola nella soluzione dei problemi del moto.

Annestata una canna cilindrica orizzontale verso il fondo di una vasca d'acqua inesausta, e chiusa la

bocca di questa canna onde non isgorghi acqua, se in un tratto sturasi questa bocca, l' acqua incomincerà a sgorgare e correre nella canna: ora cercansi le relazioni tra gli elementi del moto che l' acqua ha correndo nella canna, prima ch' essa abbia acquistata la massima velocità.

Io osservo primieramente che sarà conosciuta la natura del moto dell' acqua nella canna quando si conoscerà quella del moto dell' acqua in una sezione qualunque della canna medesima: ora

a' sia l' area di una sezione della canna normale alla sua lunghezza;

λ la sua lunghezza;

D la gravità specifica dell' acqua;

t il tempo corso dopo l' istante nel quale comincia il movimento;

s lo spazio di quel movimento;

h un' altezza conosciuta descritta da un corpo grave liberamente cadente;

θ un tempo parimente conosciuto impiegato a descriverla;

$\frac{2h}{\theta}$ sarà allora la velocità acquistata alla fine di questa caduta;

V sia l' altezza dovuta alla velocità con la quale l' acqua sgorgherebbe dalla vasca, se non ci fosse quella lunga canna;

v l' altezza dovuta alla velocità con la quale l' acqua corre nella canna, o passa dalla sezione a' alla fine del tempo t;

$\frac{2\sqrt{hV}}{\theta}$ sarà la velocità dovuta all' altezza V;

$\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$ sarà la velocità con la quale l' acqua traversa quella sezione a' alla fine del tempo t.

Ciò premesso, io rifletto che se non ci fosse la canna, il getto avrebbe la velocità $\frac{2\sqrt{hV}}{\theta}$: ora questo getto incontra la colonna fluida contenuta nella

canna medesima, e fa sopra di essa un urto per ispegnerla avanti. Alla fine del tempo t quella colonna fluida avendo già la velocità $\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$, l' acqua sgorgante dalla vasca urterà questa colonna con una velocità relativa $\frac{2\sqrt{hV}}{\theta}-\frac{2\sqrt{hv}}{\theta}$, dunque la forza motrice la quale alla fine del tempo t spinge innanzi quella colonna fluida contenuta nella canna, sarà eguale a $Da'\cdot\frac{4h}{\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2$, ovvero $Da'.\frac{2\sqrt{h}}{\theta}(\sqrt{V}-\sqrt{v})$. Secondo che delle due sentenze nelle quali sono divisi tutt' i Geometri di qualche nome, si segue quella che fa l' urto proporzionale al quadrato, o l' altra che lo fa proporzionalmente alla prima potenza della velocità relativa.

Noi, abbracciando l' ipotesi più ricevuta e più conforme alle sperienze, adotteremo la prima di quelle due misure dell'urto moltiplicata per un coefficiente indeterminato γ. Se ora questa forza motrice si divide per la massa della colonna fluida che debbe spingersi innanzi, la qual massa è $Da'\lambda$, avremo l' espressione $\frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V}-\sqrt{v})^2\cdot\gamma$ con la quale potremo rappresentare la forza acceleratrice che opera sopra ciascun punto della massa fluida in moto alla fine del tempo t.

§ 129. Ma oltre questa forza acceleratrice avvene una ritardatrice. Essa è la resistenza, come suol dirsi, *d' attrito* che l' acqua incontra a correre nella canna; consideriamo questa resistenza che soffre ciascun atomo di fluido, algebraicamente rappresentata da una formola composta di termini, dei quali uno sia proporzionale al quadrato, un altro alla prima potestà della celerità con la quale l' acqua corre nella canna, ed un altro da essa celerità indipendente;

sia questa formola $\frac{4h}{\theta^2} mv + \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} + g$ nella quale m, n, g significano coefficienti costanti che debbono esser dati dalle sperienze.

Sarà dunque la total forza acceleratrice di quel movimento $\frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V} - \sqrt{v})^2\gamma - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g$, la quale eguagliata a $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$ ci darà l' equazione differenziale tra lo spazio ed il tempo.

Quest' equazione è dunque

$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{4h}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V} - \sqrt{v})^2\gamma - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} - g$; ora se nel secondo membro di essa poniamo $\frac{\theta}{2\sqrt{h}}\left(\frac{ds}{dt}\right)$ in vece di $\sqrt{v}$, non vi s' incontreranno allora altre variabili che lo spazio ed il tempo.

Ma senza che noi ci fermiamo a cercare la relazione tra lo spazio ed il tempo, indaghiamo quella tra la velocità ed il tempo, che ci farà più vantaggio. Sia v' la velocità alla fine del tempo t, cioè quella dovuta all' altezza v'. C' insegna la Meccanica che in qualunque movimento sempre è

$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \left(\frac{dv'}{dt}\right)$; ma $v' = \frac{2\sqrt{h}}{\theta}\sqrt{v}$, dunque

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = \frac{2\sqrt{h}}{\theta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\sqrt{h}}{\theta} \times \frac{1}{\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{dt}\right);$$

$$(1) \ldots dt \left\{ \frac{4h\cdot\gamma}{\lambda\theta^2}(\sqrt{V} - \sqrt{v})^2 - \frac{4h}{\theta^2} mv - \frac{2\sqrt{h}}{\theta} n\sqrt{v} - g \right\} = \frac{\sqrt{h}}{\theta} \times \frac{dv}{\sqrt{v}},$$

dall' integrazione della quale dipenderà la soluzione del problema.

A siffatta equazione si può dare la semplicissima forma

$$dt = \frac{dv}{(a + b\sqrt{v} + cv)\sqrt{v}},$$ avremo allora

$$t = \int \frac{dv}{(a + b\sqrt{v} + cv)\sqrt{v}}.$$

§ 130. Il problema qui sopra risoluto è il primo di quei che compongono la teorica geometrica dell' Ariete idraulico; ed affinchè bene si comprenda perchè la forza motrice la quale cagiona il moto dell' acqua nella canna, valutare si debba come si valuta l' urto dei fluidi, basta riferire quanto a tal proposito si trova nel Trattato di quella macchina.

Se al foro fatto nella sottil parete della vasca, al quale è innestata la canna, questa canna non ci fosse, l' acqua sgorgherebbe da quel foro con una velocità, che giusta la più ricevuta opinione dei geometri è quella che un corpo grave acquisterebbe cadendo dall' altezza del livello dell' acqua nella vasca. Se quest' acqua sgorgante dal foro incontrasse poi un ostacolo prossimo al foro, che tendesse ad impedirne l' uscita, ognuno concederà che quell' acqua farebbe un continuato urto sopra quell' ostacolo per ispingerlo innanzi: se poi quest' ostacolo non fosse amovibile, tutta la forza dell' acqua si estinguerebbe in quell' urto: non così però avverrebbe se quell' ostacolo fosse capace di acquistar movimento. Allora esso nel primo istante acquisterebbe, a cagione di quell' urto, un certo grado di celerità, tanto minore quanto maggiore fosse la sua massa, e con questa piccola velocità acquistata in principio, egli scapperebbe davanti all' acqua, che, uscendo dal foro, lo inseguirebbe per urtarlo di nuovo. Nel secondo istante adunque quell' ostacolo riceverebbe, mercè l' urto dell' acqua, un secondo grado di velocità, ma minore del primo; nel terzo istante riceverebbe anche un terzo grado di celerità, ma

minor del secondo, e così via discorrendo, finchè quell' ostacolo o corpo che l' acqua fluente incontra nel suo passaggio, avesse acquistata tanta velocità da sfuggire intieramente all' impulsione dell' acqua, o tale, come si dice in meccanica, che la velocità relativa dell' acqua fosse nulla.

Per meglio comprendere tutto questo, basterebbe fingere che l' acqua nell' uscire dal foro della vasca perdesse la sua gravità (per la cui opera cangiasi il moto rettilineo orizzontale che allora l' acqua prenderebbe, in curvilineo), giacchè questa supposizione non altera il nostro ragionamento: allora tutto, in questo caso ipotetico, accadrebbe come in quello del moto di una vela spinta dal vento, o di un galleggiante strascinato dalla corrente di un fiume, considerati i due movimenti prima che siano giunti all' equabilità.

Io ho diviso in istanti il tempo nel quale si fa questa comunicazione di moto, ed ho supposto che essa segua, per dir così, ad intervalli separati; ma l' ho fatto solamente per comodo di spiegazione; del resto, l' effetto dell' acqua sopra quel corpo è continuo, e dura finchè il corpo non abbia ricevuta tanta velocità da sfuggire l' urto dell' acqua che lo insegue.

Ora la colonna fluida contenuta nella canna orizzontale, e che per essere orizzontale non può da sè medesima darsi alcun moto, è appunto quell' ostacolo o quel corpo che l' acqua, nell' uscire dalla vasca pel foro, incontra nel suo passaggio, e che essa urta e spinge avanti, come abbiamo diffusamente spiegato nel caso immaginato. Quella colonna adunque di fluido dal momento in cui è aperta la bocca della canna, dal momento, cioè, in cui lo sforzo che l' acqua della vasca fa per uscire, è libero di operare, incomincia ad acquistare un primo e piccolissimo grado di velocità; quindi ne acquista un secondo, poi un terzo, e così di mano in mano

finchè sia divenuta tanto veloce, che l'acqua sgorgante dal foro non possa più operare su di lei.

Nè faccia difficoltà che una porzione della colonna fluida contenuta nella canna orizzontale, esca continuamente della bocca, perchè altrettanta appunto ne passa dal foro nella canna medesima, e quindi la massa dell'acqua della colonna che debbe spingersi innanzi, rimane la stessa.

Io ho riferito tutto questo discorso per mostrare come taluno siasi ingannato allora quando ha asserito che nella soluzione del su mentovato problema non era dichiarata la ragione per la quale quella forza motrice era stimata colla formola dell' urto dei fluidi; da tale inganno poi ne è derivato uno anche peggiore, che egli, cioè, si è dato ad intendere di aver riempiuta quella lacuna senza che possa comprendersi in qual modo.

FINE DEL PRIMO VOLUME.

INDICE

de' Capi delle parti I e II.

PARTE PRIMA.

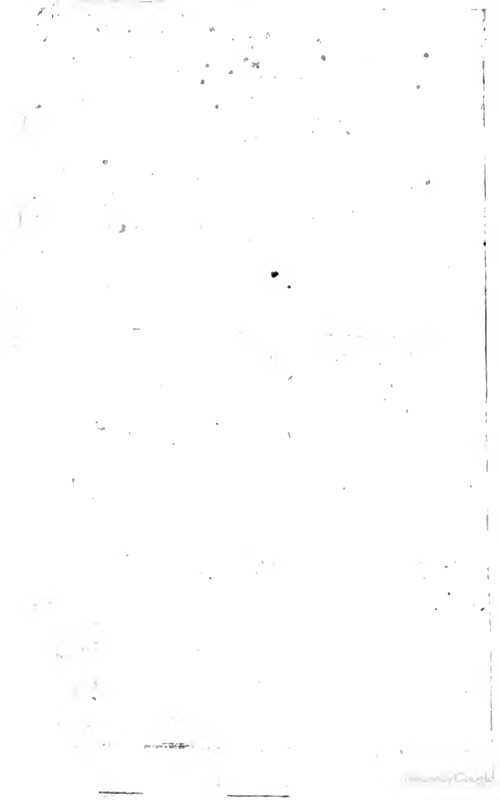
CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.

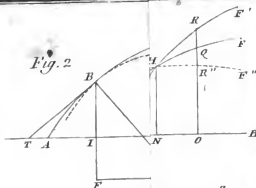
PARTE II.

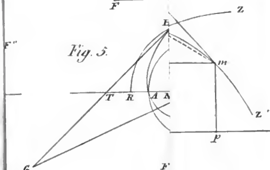
CALCOLO DIFFERENZIALE.

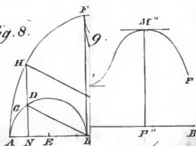
Stampato per cura di L. Nardini,

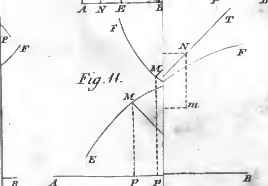
Ispettore della Stamperia Reale.




Fig. 2
R
F'
F
H
Q
R''
F''
B
T
A
I
N
O
B
F


Z
E
Fig. 5.
m
T
R
A
Z'
P
G


F
Fig. 8.
9.
M''
H
F
D
G
A
N
E
B
P''
B


F
T
N
F
Fig. 11.
M
m
M
E
A
P
P
B







